

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XLV.

I. Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Lichtbrechung des Glases; von C. Pulfrich.

(Hierzu Tafel VIII Fig. 1–2.)

Das optische Verhalten des Glases und einer Anzahl ein- und zweiaxiger Krystalle unter dem Einfluss der Temperatur bildet eine bemerkenswerthe Ausnahme von dem Verhalten der übrigen durchsichtigen, festen, flüssigen und gasförmigen Körper. Während nämlich bei diesen mit erhöhter Temperatur, der Abnahme der Dichtigkeit entsprechend, auch das Brechungsvermögen abnimmt, tritt bei der Mehrzahl der Glassorten und einigen Krystallen gerade das Umgekehrte ein: *Die Brechungsindices wachsen mit steigender Temperatur*. In Hinblick auf die bekannte und allgemein als Regel betrachtete Proportionalität von brechender Kraft und Dichtigkeit bildet somit das angegebene Verhalten eine höchst auffällige Erscheinung, die zwar schon seit Jahren bekannt ist, aber bis jetzt noch keine Erklärung gefunden hat.¹⁾

1) In der nachstehenden Literaturzusammenstellung ist hinter jeder Literaturangabe in Parenthese bemerkt, auf welche Substanz sich die Untersuchung bezieht. Die Namen derjenigen Substanzen, welche das oben beschriebene Verhalten zeigen, sind durch besonderen Druck hervorgehoben; bei allen anderen angeführten Körpern nimmt der Brechungsindex mit der Temperatur ab.

Rudberg, Pogg. Ann. **26**. p. 291. 1832 (*Kalkspath*, Quarz, Aragonit).
 Fizeau, Ann. ch. phys. (3) **66**. p. 429. 1862. Pogg. Ann. **119**. p. 87. 297. 1863 (*Kalkspath*, *Flussspath*, *Zinkglas von Maïs*, *Glas von St. Gobain*, *Gew. Flintglas*). Ann. ch. phys. (4) **2**. p. 143. 1864 (Quarz).
 Stefan, Wien. Ber. (II) **63**. p. 239. 1871. (Steinsalz, Sylvin, Kaliumalaun, *Flussspath*, *Glas*). Hastings, Astron. Nach. Nr. 2501 und Americ. Journ. of sc. (3) **15**. p. 269. 1878 (2 *Feil's Flintgläser*, *Feil's Crown Glas*). G. Müller, Publ. des astrophysik. Obs. zu Potsdam (16) **4**. p. 151. 1885 (*Kalkspath*, Quarz, mehrere *Flint-* und *Crown Gläser*).
 Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. **XLV**.

Bei den doppeltbrechenden Krystallen erscheint die Sache noch viel verwickelter als beim Glase. Denn hier ist schon bei gewöhnlicher Temperatur weniger die verschiedene Dichte, als vielmehr die lineare Anordnung der Massentheilchen für die nach den verschiedenen Richtungen stattfindende Fortpflanzungsgeschwindigkeit maassgebend. Deshalb ist auch die bei den Krystallen beobachtete Erscheinung nicht in dem Maasse von grundsätzlicher Bedeutung wie beim Glase, welches in seinen Eigenschaften vollständig den Charakter eines isotropen Körpers besitzt. Sehr wahrscheinlich ist aber auch bei den Krystallen die Erklärung in der gleichen Ursache zu suchen, welche das Verhalten des Glases bestimmt und welche darzulegen, der Zweck dieser Arbeit ist.

Bei der grossen Wichtigkeit, welche die Frage nach einer genauen Kenntniss des Einflusses der Temperatur auf die Lichtwirkung des optischen Glases in theoretischer und praktischer Hinsicht besitzt, und bei den zum Theil von einander abweichenden Angaben, die sich in der Literatur vorfinden, war es in erster Linie wünschenswerth, den Gegenstand einer gründlichen experimentellen Untersuchung zu unterwerfen. Unterstützt durch die reichen Mittel der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena, in deren Laboratorium diese Arbeit ausgeführt wurde, und des Glastechnischen Laboratoriums von Schott und Gen. ist es mir unter Anwendung einer neuen, ausserordentlich bequemen und sicheren Beobachtungsmethode gelungen, die Temperaturvariationen für eine grössere Anzahl der von dem genannten Jenenser Glaswerk hergestellten optischen Gläser und für einige durchsichtige Mineralien über allen Zweifel sicher festzustellen. Auf Grund der so gewonnenen Thatsachen ist es mir dann möglich gewesen, der Frage nach dem physikalischen Grunde für das abweichende Verhalten des Glases näher zu treten und auf diese Frage eine, wie ich glaube, eindeutige Antwort zu geben.

F. Vogel, Wied. Ann. 25. p. 87. 1886 (*Kalkspath, schweres Flintglas, weisses Glas*). Offret, Bull. de la soc. franç. de min. 10. p. 405—697. 1890 (*Beryll, Phenacit, Kalkspath, Aragonit, Baryt, Topas de minas geraes, Topas von Schneckenstein, Cordierit, Sanidin, Oligoclas*). Arzruni, Groth's Z. f. Kryst. 1. p. 165. 1877 (*Schwerspath, Coelestin, Anglesit*). Dufet, Bull. de la soc. minér. de France 7. p. 182 und 8. p. 187 und 257 (*Quarz, Beryll, Flusspath*).

Die Arbeit zerfällt in zwei Theile: der I. Theil enthält die Beschreibung der Methode und der benutzten Apparate, die Beobachtungsergebnisse und den Vergleich mit den Resultaten anderer Beobachter. In dem II. Theile sind die Gründe mitgetheilt, welche für die von uns gegebene Erklärung maassgebend gewesen sind.

I. Theil.

Experimentelle Untersuchungen.

§ 1. Methode der Untersuchung; das Abbe'sche Spectrometer; Erhitzungsapparat.

Zum besseren Verständniss der von mir angewandten Methode ist es zunächst erforderlich, das zu den Messungen benutzte Abbe'sche Spectrometer ¹⁾ einer kurzen Besprechung zu unterziehen.

Das Princip, auf welchem dieser Apparat beruht, ist das der Autocollimation. Ein einziges Fernrohr dient sowohl zur Beleuchtung als auch zur Beobachtung. In der Brennebene des Fernrohrobjectivs ist ein Verticalspalt angebracht, der von einer seitwärts aufgestellten Lichtquelle mittelst eines kleinen den Spalt bedeckenden Reflexionsprismas beleuchtet wird. Das aus dem Fernrohr austretende parallelstrahlige Büschel wird je nach der Stellung des zu untersuchenden Prismas entweder direct reflectirt, oder zuerst gebrochen und dann an der Hinterfläche des Prismas reflectirt. Das Strahlenbündel kehrt hierauf wieder in das Fernrohr zurück und erzeugt in der Focalebene des Objectivs ein scharfes Bild des Spaltes, das mit letzterem zusammenfällt, wenn das reflectirte Strahlenbündel vollkommen senkrecht zu der reflectirenden Fläche gerichtet ist. Der am Theilkreis abgelesene Drehungswinkel des Prismas führt zu der Kenntniss des Prismenwinkels φ und des einem bestimmten homogenen Strahlenbündel zugehörigen Einfallswinkel α (Fig. 1 Taf. VIII). Man findet dann den Brechungsindex (N) vermöge der einfachen Beziehung:

1) E. Abbe, Neue Apparate, Jena 1874. — Eine ausführliche Beschreibung der neuesten Construction des Spectrometers, sowie aller bei dieser Arbeit verworthen instrumentellen Hülfsmittel soll demnächst mit Abbildungen in der Zeitschrift für Instrumentenkunde veröffentlicht werden.

$$(I) \quad N = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi}.$$

Aus naheliegenden Gründen ist der Winkel φ nicht grösser als die Hälfte der bei der Methode der minimalen Ablenkung üblichen Winkelgrösse zu bemessen, also ungefähr gleich 30° .

In Wirklichkeit kann das Zusammenfallen des Spaltbildes mit dem Spalt nicht direct beobachtet werden, weil der Spalt von dem Reflexionsprisma bedeckt ist. Deshalb ist in der für die Beobachtung freien Hälfte des Gesichtsfeldes eine Marke angebracht — in unserem Falle ein feiner, parallel zur Spaltrichtung aufgezogener Spinnefaden — und es wird nun das Zusammenfallen des Spaltbildes mit diesem Faden beobachtet. Eine solche Einstellung kann mit sehr grosser Genauigkeit ausgeführt werden. Auch lehrt eine nähere Betrachtung, dass, obgleich jetzt den Anforderungen der Methode nicht in aller Strenge genügt wird, für die Methode selbst kein Nachtheil entsteht. Denn so lange man es mit directen Reflexionen zu thun hat (Bestimmung des Winkels φ), ist es überhaupt gleichgültig, unter welchem Incidenzwinkel die Strahlen auf die reflectirende Fläche auffallen, und nur in dem anderen Falle (Bestimmung von α) entsteht durch die Brechung eine Collimationsdifferenz, die aber so klein ist, dass sie unbedenklich vernachlässigt werden kann. Sind nämlich Spalt und Faden nebeneinander gelegen, wie in unserem Falle, sodass die sämmtlichen Strahlen dem Hauptschnitt des Prismas angehören, so lässt sich der Fehler im Resultat leicht rechnerisch verfolgen, und es ergibt sich, dass bei einer Brennweite des Fernrohrobjectivs von 28 cm und einem Abstand von 2 mm zwischen Spalt und Faden, der praktisch leicht eingehalten werden kann, die so erhaltenen Brechungsindices eine Abweichung von 1—2 Einheiten der 5. Decimale von N besitzen, die aber, da sie für alle Farben die gleiche ist, für uns ganz bedeutungslos ist. Etwas verwickelter, aber im Resultat nicht ungünstiger liegen die Verhältnisse, wenn die Marke — zwei halbkreisförmige Backen, zwischen denen das Spaltbild einzustellen ist — in der Längsrichtung des Spaltes unterhalb desselben angebracht ist.

Es ist als ein grosser Vorzug der Methode hervorzuheben, dass man nicht nöthig hat, wie es z. B. bei der Methode der

minimalen Ablenkung der Fall ist, die richtige Einstellung besonders zu prüfen; die Handhabung ist dadurch ausserordentlich vereinfacht, denn man braucht nur den Theilkreis mit Prisma so weit zu bewegen, bis das Spaltbild mit der Marke zusammenfällt, das ist dann die richtige Einstellung. Zur Feinbewegung des Theilkreises dient eine Mikrometerschraube.

Ein weiterer Vorzug des Abbe'schen Spectrometers, wohl der wichtigste aber bisher nur noch wenig beachtete, besteht in der ausserordentlichen Genauigkeit, mit der die *Dispersionsbestimmung* ausführbar ist. Dieselbe geschieht nicht, wie fast allgemein üblich, durch Ermittlung der Brechungsindices für einzelne Fraunhofer'sche Linien, sondern durch eine *Differenzmessung*, auf *mikrometrischem Wege*. Man bedient sich zu dem Zwecke der vorhin erwähnten Mikrometerschraube, welche mit einer Trommel und Theilung versehen ist, und lässt die einzelnen Spectrallinien nacheinander mit dem Faden zusammen fallen. Die Differenz der abgelesenen Trommeltheile, in Winkelmaass umgerechnet, ergibt die Winkelgrösse, um welche sich die Einfallswinkel (α) der verschiedenen gefärbten Strahlenbüschel von einander unterscheiden. Diese für die Grösse der Dispersion maassgebenden Winkeldifferenzen werden so unabhängig vom Theilkreis und viel genauer gemessen, als eine directe Ablesung am Theilkreise erlauben würde.

Der grösseren Genauigkeit der mikrometrischen Messung entspricht auch die Art der Berechnung. Bezeichnet man für eine Farbe (Natriumlicht), für welche der Brechungsindex *direct* bestimmt werden soll, den zugehörigen Einfallswinkel mit α_0 , den mikrometrisch ermittelten Winkelabstand eines anders gefärbten Strahlenbündels, welches an der Hinterfläche senkrechte Reflexion erleidet, mit β , so lässt sich vermöge der beiden Beziehungen:

$$N_D = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \varphi}, \quad N = \frac{\sin (\alpha_0 + \beta)}{\sin \varphi}$$

schreiben:

$$\begin{aligned} N - N_D &= \frac{1}{\sin \varphi} (\sin (\alpha_0 + \beta) - \sin \alpha_0) \\ &= \frac{1}{\sin \varphi} \cdot 2 \cos \left(\alpha_0 + \frac{\beta}{2} \right) \cdot \sin \frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

wofür man in Anbetracht der kleinen Grösse β auch setzen kann:

$$(II) \quad N - N_D = \frac{1}{\sin \varphi} \cos \left(\alpha_0 + \frac{\beta}{2} \right) \cdot \sin \beta.$$

Unter Benutzung der vorstehenden Formel erhält man direct aus den beobachteten Winkeldifferenzen β die Differenz der Brechungsindices für die verschiedenen Spectralfarben gegen den Brechungsindex für gelbes Licht. Der Vortheil dieser Rechnungsweise liegt auf der Hand, denn man ist bei der Ausführung der Rechnung der Anwendung einer mehr als vierstelligen Logarithmentafel völlig enthoben, während bei directer Bestimmung der Brechungsindices selbst die Anwendung einer siebenstelligen Logarithmentafel nicht ausreicht, um eine der mikrometrischen Messung entsprechende Genauigkeit des Resultats zu erzielen.

Noch eine andere damit zusammenhängende Bemerkung möchte ich mir hier erlauben. Es ist vielfach üblich¹⁾, zur Charakteristik für das optische Verhalten der Substanz, die Brechungsindices des Körpers für eine Anzahl Fraunhofer'scher Linien einzeln aufzuzählen. Dadurch ist es aber dem Leser ausserordentlich erschwert, sich über den Verlauf der Dispersion schnell zu orientiren. Ohne Bildung von Differenzen und ohne vergleichende Rechnungen geht es dabei nicht ab. Weit vortheilhafter ist es, den Brechungsindex nur für eine Farbe (N_D) anzugeben und im Uebrigen zur Charakteristik der Dispersion die Differenzen der Brechungsindices bez. die relativen Dispersionen mitzutheilen. Es ist das eine den praktischen Bedürfnissen entsprungene und auch für theoretische Untersuchungen werthvolle Vereinfachung, welche in dem Glaswerk sowohl wie in der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena schon seit Jahren in Anwendung gebracht worden ist, und deren ich mich im Folgenden ebenfalls bedienen werde. —

Um dem Prisma eine höhere Temperatur (Siedetemperatur des Wassers) zu geben, benutzte ich bei meinen Untersuchungen einen von Abbe construirten *Erhitzungsapparat*. Eine kurze Mittheilung über diesen Apparat findet sich in der

1) U. A. auch in den Landolt'schen Tabellen.

Zeitschr. für Instrumentenk. p. 362 1889. Derselbe besteht aus einem Tischchen, welches mit mehreren übereinanderliegenden Böden und Rinnen versehen ist und auf das Tischchen des Spectrometers aufgesetzt werden kann; ferner aus einem überhängenden doppelwandigen Gehäuse, welches an einem besonderen Stativ befestigt ist und an der Drehung des Theilkreises nicht theilnimmt. Die Rinnen sind mit Quecksilber als Sperrflüssigkeit gefüllt. Es entstehen auf diese Weise zwei von einander getrennte Hohlräume; der äussere wird von dem Dampfe einer siedenden Flüssigkeit durchströmt, der innere Hohlraum enthält das zu untersuchende Prisma. Der Austritt des Dampfes erfolgt durch eine am unteren Ende des Gehäuses angebrachte Röhre mit Schlauch und Kühlapparat. Wie die in dem inneren Hohlraum luftdicht eingesetzten Thermometer erkennen lassen, ist die Temperatur im Innern der Temperatur der constant siedenden Flüssigkeit (Wasser, Alkohol, Aether) gleich; denn die Wärme wird dem inneren Hohlraum von allen Seiten, auch von unten und oben zugeführt, und man ist im Stande, durch fortgesetztes Kochen die constante Siedetemperatur beliebig lange zu erhalten. Das Gehäuse selbst, sowie die untere Seite des Tellers sind mit einer dicken Filzlage versehen. Bei niederer (Zimmer-) Temperatur wirkt die Vorrichtung als Schutzmittel gegen den Einfluss einer Temperaturänderung von aussen.

Zum Einblick in den inneren Hohlraum ist dem Fernrohr-objectiv gegenüber in dem Gehäuse eine Oeffnung angebracht, welche durch eine Glasplatte mit guten ebenen Flächen verschlossen ist. Das Gehäuse wird so gestellt, dass die beiden Flächen annähernd senkrecht zur Axe des Fernrohrs gerichtet sind. Alsdann hat die Platte keinen Einfluss auf den Gang der Lichtstrahlen.

Der hier nur kurz skizzirte Apparat hat mir für die besonderen Zwecke dieser Arbeit gute Dienste geleistet. Aber auch für allgemeinere Aufgaben lässt sich die Heizvorrichtung mit Vortheil verwenden, u. A. zur spectrometrischen Untersuchung von Flüssigkeiten im Hohlprisma, zum Studium der Gesetze der Ausdehnung doppelt brechender Krystalle durch Bestimmung der durch die Wärme hervorgerufenen Winkeländerungen bestimmt orientirter Prismen solcher Körper. —

Was endlich die von mir angewandte *Methode zur Be-*

stimmung der Temperaturvariationen der Brechungsindices anbe-
trifft, so gründet sich dieselbe auf ein von Abbe angegebenes
und schon vor längerer Zeit veröffentlichtes Verfahren.¹⁾ Das-
selbe ist bisher unbeachtet geblieben, sonst würde man mit
Rücksicht auf den vorliegenden Zweck wohl schon längst ver-
sucht haben, die Methode in Anwendung zu bringen, denn
sie besitzt sowohl in Bezug auf die Einfachheit der Beob-
achtung, als auch in Hinsicht der Genauigkeit der Resultate,
Vorzüge, welche sie jedem anderen spectrometrischen Ver-
fahren weit überlegen machen. Die Methode gestattet näm-
lich, die dem Einfluss der Temperatur unterworfenen Winkel-
grössen *in ihren Differenzen* von einer Beobachtung zur ande-
ren *selbstständig, durch mikrometrische Messung* zu bestimmen.

Der Gedanke ist folgender: Auf der dem Fernrohr zuge-
wandten Fläche des zu untersuchenden Prismas sei ein zweites,
kleineres Prisma von solchem Winkel befestigt, dass das von
ihm herrührende Spiegelbild des Spaltes sich auf das gleich-
falls im Gesichtsfeld erscheinende Spectrum projicirt. Bei
einer Temperaturänderung wird dann, da die Winkel der bei-
den Prismen sich nicht ändern, und unter der Voraussetzung,
dass auch die Verbindung der beiden Prismen keine
Aenderungen erfährt, eine Lagenänderung der reflectiren-
den Flächen gänzlich ausgeschlossen sein. Es sind also die
mit Hilfe der Mikrometerschraube des Spectrometers ermittel-
ten Einstellungsunterschiede der verschiedenen Spectralfarben
gegen die genannte unveränderliche Hilfsmarke gleich den
Veränderungen, welche die bezüglichen Einfallswinkel (α) durch
die Temperatur erleiden und welche in der weiter unten zu
besprechenden Weise in Rechnung gezogen werden.

Die Bestimmung des Einfallswinkels selbst — durch
Winkelmessung am Theilkreise — ist somit *auf eine einzige
Farbe* (Natriumlicht) *und auf eine einzige Temperatur* (Zimmer-
temperatur) beschränkt, sodass, wenn der Winkel, mit mässiger
Genauigkeit, einmal ermittelt ist, man zur Bestimmung der
Abhängigkeit der Lichtbrechung von Temperatur und Farbe
des Theilkreises nicht mehr bedarf. In der That würde man
für diesen Zweck mit den denkbar einfachsten instrumentellen

1) l. c. p. 29.

Hülfsmitteln auskommen: einem feststehenden Fernrohr und einem drehbaren Tischchen für das Prisma mit Mikrometerbewegung.

Die Methode hat in dieser Form den Nachtheil, dass die Befestigung des Hülfsp Prismas an das zu untersuchende Prisma schwer in praktisch ausreichender Vollkommenheit erzielt werden kann. Derselbe fällt aber gleich fort, wenn man, wie ich bei der vorliegenden Untersuchung verfahren bin, *die Hülfsläche direct an das zu untersuchende Prisma anschleift*. Zur näheren Erläuterung diene die Fig. 1 Taf. VIII, welche den Hauptschnitt eines so zugerichteten Prismas in zweimaliger Vergrößerung darstellt. Das abgetrennte Stück des Prismas ist durch die beiden punktirten Linien angedeutet. Es bezeichnet wieder φ den brechenden Winkel, ferner ist α_0 der Einfallswinkel des an der Vorderfläche (II) gebrochenen Strahlenbündels. Die Fläche III ist nahezu senkrecht zur Richtung des Strahlenbündels gelegen. Es empfiehlt sich, dieselbe so anschleifen zu lassen, dass die Marke ganz ausserhalb des Spectrums zu liegen kommt, weil sonst leicht ein Zusammenfallen der Marke mit einer Spectrallinie eintreten kann, was für die Genauigkeit der Einstellung von Nachtheil ist.

Noch ein anderer Umstand muss hier erwähnt werden. Die Form des Prismas bewirkt nämlich, wie leicht ersichtlich, eine Halbiring des Fernrohrobjectivs, derart, dass die beiden Hälften in der Richtung der zu messenden Verschiebung *neben* einander zu liegen kommen. Dieser Umstand verlangt, dass man darauf achte, dass während der Dauer einer Versuchsreihe keine Aenderung in der Einstellung des Oculars statffinde, weil eine solche, verbunden mit einer Aenderung in der Accommodation des beobachtenden Auges scheinbare Verschiebungen der beiden Bilder gegeneinander hervorruft, deren Betrag grösser sein kann als die zu messenden Werthe. Unter Berücksichtigung der angegebenen Vorsichtsmaassregel kann aber die bezeichnete Fehlerquelle ganz vermieden werden. Ebenso verhält es sich mit einer Aenderung des Spaltabstandes vom Objectiv des Fernrohres und einer Aenderung der Brennweite des letzteren, welche durch Temperaturschwankungen der umgebenden Luft, bez. durch die vom Erhitzungsapparat auf Objectiv und Fernrohr überströmende Wärme hervorgerufen werden können. Da die ganze Versuchsreihe in ungefähr zwei

Stunden erledigt werden konnte und auch für die Abhaltung der Wärmestrahlung in praktisch ausreichender Weise gesorgt war — ein zwischen Objectiv und Heizkammer eingeschobener Schirm wurde nur für die Zeit der eigentlichen Messung entfernt —, so ist auch diese Fehlerquelle für unsere Beobachtungsmethode ganz ohne Nachtheil. Damit ist überhaupt jeder Einwand gegen die Anwendbarkeit der Methode beseitigt.

Die beschriebene Methode setzt die Unveränderlichkeit der drei Prismenwinkel voraus. Die Voraussetzung trifft für die isotropen Körper infolge der nach allen Seiten stattfindenden gleichartigen Ausdehnung ohne weiteres zu.¹⁾ Bei doppelt brechenden Krystallen ist das natürlich anders. Hier ist bekanntlich die Ausdehnung nach den verschiedenen Richtungen verschieden und nur bei einaxigen Krystallen findet in der senkrecht zur optischen Axe gelegenen Ebene eine gleichmässige Ausdehnung statt. Macht man in diesem Falle die genannte Ebene zum Hauptschnitt des Prismas, so bleiben auch hier die Prismenwinkel unverändert. Die weiter unten mitgetheilte Versuchsreihe an Quarz habe ich mit einem so orientirten Prisma (optische Axe parallel zur brechenden Kante) ausgeführt.

Bezüglich der rechnerischen Verwerthung der mikro-

1) Einzelne der untersuchten Glasprismen gestatteten aber auch eine directe *experimentelle* Prüfung dieser Voraussetzung. Dieselbe erfolgte auf mikrometrischem Wege durch Ausmessung des Abstandes zweier Spaltbilder, von denen das eine (die eigentliche Marke) durch normale Reflexion an der Fläche III (Fig. 1) entstanden ist und das andere einer mehrfachen inneren Reflexion seinen Ursprung verdankt. In Fällen nämlich, wo der Winkel α nahezu doppelt so gross ist als φ , ist das dreiseitige Prisma ein gleichschenkeliges und die an der Fläche III normal eintretenden Strahlen werden nach einer Reflexion an Fläche I von der Fläche II normal zurückgeworfen. Der Abstand, den das so entstandene zweite Bild vom ersten besitzt, hängt allein von der Grösse der drei Winkel des Prismas ab. Denn da das zweite Bild nur eine geringe spectrale Färbung besitzt, was daher rührt, dass die Bedingung der Gleichheit der beiden Prismenwinkel nicht vollständig erfüllt ist, so ist klar, dass schon der Unterschied der Indices für die verschiedenen Farben nur einen sehr geringen Einfluss auf den Abstand ausüben kann, von einem Einfluss der Temperaturvariationen der Brechungsindices also gar keine Rede sein kann. Die Ausmessung des Abstandes ergab für diesen eine vollständige Constanz innerhalb der Genauigkeitsgrenze der mikrometrischen Messung

metrisch gemessenen Verschiebungen gilt dasselbe, was weiter oben über die Bestimmung der Dispersion gesagt wurde. Auch hier muss im Interesse der grösseren Genauigkeit und Bequemlichkeit ein besonderes Verfahren angewandt werden, denn es wäre sehr wenig rationell, wollte man die mikrometrisch ermittelten Temperaturvariationen der Einfallswinkel α einfach an diesen Winkeln selbst anbringen.

Der Weg ist durch die Analogie mit der Dispersionsbestimmung vorgeschrieben. Wir nennen t_2 die höhere, t_1 die niedere (Zimmer-) Temperatur. Die beobachtete Temperaturänderung des Einfallswinkels α wollen wir mit δ , und die den beiden Temperaturen zukommenden Brechungsindices bezogen auf Luft von derselben Temperatur wie das erwärmte Prisma mit N_1 und N_2 bezeichnen.

Eine der früheren völlig gleiche Behandlung der beiden Gleichungen

$$N_1 = \frac{1}{\sin q} \sin (\alpha_0 + \beta)$$

$$N_2 = \frac{1}{\sin q} \sin (\alpha + \beta + \delta)$$

ergibt dann für die zu bestimmende Differenz

$$(III) \quad N_2 - N_1 = \frac{1}{\sin q} \cdot \cos \left(\alpha_0 + \beta + \frac{\delta}{2} \right) \sin \delta,$$

aus der sich die *Änderung des relativen Index pro 1° C.* gültig für die Mitteltemperatur $t = \frac{1}{2}(t_2 + t_1)$ ableitet zu:

$$(IV) \quad \Delta N = \frac{N_2 - N_1}{t_2 - t_1}.$$

§ 2. Reduction auf den leeren Raum.

Die Kenntniss des vorstehenden Ausdrucks ist überall da von grossem Interesse, wo, wie es in der Praxis meist der Fall ist, die Luft an den Temperaturvariationen des Glases Theil nimmt, u. a. wenn es darauf ankommt, die Veränderungen der Brennweite des Objectives eines astronomischen Fernrohres zu bestimmen, welche durch die veränderte Lichtbrechung des Glases und der Luft im Innern des Fernrohr tubes entstanden sind. Für den theoretischen Zusammenhang aber der Lichtbrechung mit der Dichte und für die richtige Erkenntniss des

thatsächlichen Verhaltens des Glases unter dem Einflusse der Temperatur ist aber eine andere Grösse maassgebend, die man erhält, wenn man die Brechungsindices des Glases auf Luft von constanter Temperatur, oder was das rationellste ist, direct auf den leeren Raum reducirt.

Wir bezeichnen zu dem Ende die den beiden Temperaturen zukommenden *absoluten* Brechungsindices mit \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 . Die Beziehung zwischen dem absoluten und dem relativen Brechungsindex des Glases wird dann durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$\mathfrak{R}_1 = N_1 \cdot n_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{R}_2 = N_2 \cdot n_2.$$

wo n_1 und n_2 die Brechungsindices der Luft gegen den leeren Raum bedeuten.

Durch Subtraction erhält man zunächst:

$$\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1 = N_2 n_2 - N_1 n_1$$

und wenn man rechts $N_1 n_2$ addirt und subtrahirt

$$= (N_2 - N_1) n_2 + N_1 (n_2 - n_1),$$

in welchem Ausdruck rechts der Factor n_2 des ersten Gliedes unbedenklich fortgelassen werden kann. Endlich ergibt sich für die *Aenderung des absoluten Brechungsindex pro 1° C.* und für die Mitteltemperatur $t = \frac{1}{2} (t_1 + t_2)$ der Ausdruck:

$$(V) \quad \Delta \mathfrak{R} = \Delta N + N \cdot \Delta n.$$

In dieser Gleichung ist die Grösse Δn , die Aenderung des Brechungsindex der Luft für eine Temperaturzunahme von 1° C., noch unbekannt. Dieselbe lässt sich aber mit Hülfe des Satzes vom constanten Brechungsvermögen leicht berechnen, der bekanntlich für Gase mit grosser Annäherung zutrifft. Vermöge der Beziehung

$$\frac{n-1}{d} = \frac{n_0-1}{d_0} = \text{const.}$$

lässt sich nämlich zunächst schreiben

$$n-1 = (n_0-1) \frac{1}{1 + \alpha t} \cdot \frac{b}{760}.$$

Hieraus erhält man dann die gesuchte Grösse Δn zu:

$$(VI) \quad \Delta n = - (n_0 - 1) \frac{\alpha}{(1 + \alpha t) [1 + \alpha (t + 1)]} \cdot \frac{b}{760}.$$

In dieser Gleichung bezeichnet n_0 den Brechungsindex der trockenen atmosphärischen Luft für 0° und 760 mm Druck. α ist der Ausdehnungscoefficient (0,00367), b der Barometerstand und t die Mitteltemperatur. In Bezug auf n_0 genügt es, für alle Farben $n_0 - 1 = 0,000294$ zu setzen.

Man kann sich die Berechnung der Grösse Δn für jeden einzelnen Fall dadurch sehr erleichtern, dass man für den Umfang der in Betracht kommenden Temperaturen und Barometerstände die Werthe für Δn tabellarisch zusammenstellt und den gesuchten Werth dieser Tabelle entnimmt. In dieser Weise bin ich bei der vorliegenden Untersuchung verfahren. Die nachfolgende Tabelle gibt einen Ueberblick über den Verlauf der Grösse Δn für einige Temperaturen und Barometerstände (mittlerer Barometerstand für Jena $b = 748$).

$$- \Delta n_{(t, b)}$$

t	$b = 730$	740	750	760	770
0°	0,1033	0,1047	0,1061	0,1074	0,1089
10°	0,0961	0,0974	0,0987	0,1000	0,1013
20°	897	909	921	0,0933	0,0946
30°	837	848	859	871	882
40°	785	796	807	818	829
50°	738	748	758	768	778
60°	694	704	713	723	732
70°	654	663	672	681	690
80°	617	626	635	643	651
90°	584	592	600	608	616
100°	554	561	568	576	583

Die Zahlen sind in Einheiten der fünften Decimale von n gerechnet. Der Grenzwert für sehr hohe Temperaturen ist Null.

Die Benutzung der Tabelle vorausgesetzt, gestaltet sich die ganze Reduction zu einem sehr einfachen Rechenexempel.

Die so erhaltene Grösse ΔN stellt eine von den Druck- und Temperaturverhältnissen der umgebenden Luft *unabhängige Constante* dar, während Δn mit diesen veränderlich ist und für jeden einzelnen Fall mit Hülfe der Gleichung

$$\Delta N = \Delta N - N \cdot \Delta n$$

aus den mitgetheilten Daten berechnet werden kann.

Ob ΔN für alle Temperaturen gleich bleibt oder sich mit

ihr verändert, hängt ebenso wie die Art der Veränderung nur von der Natur der Substanz ab. Sehen wir aber davon ab und betrachten ΔN als angenähert constant, so ist die Art der Veränderung von ΔN vorzugsweise durch den Verlauf der negativen Grösse Δn bestimmt. Es kann also der bemerkenswerthe Fall eintreten (ΔN ist negativ, dem absoluten Werthe nach aber kleiner als das Glied $N \cdot \Delta n$, z. B. bei dem Glase O. 1022), dass die anfangs positive Grösse ΔN für eine etwas höhere Temperatur Null wird und bei einem weiteren Anwachsen der Temperatur negative Werthe annimmt. In einem solchen Falle wird also je nach der gewählten Temperatur der relative Index entweder zunehmen oder abnehmen oder constant bleiben, während der absolute Index stetig abnimmt.

Man sieht aus den bisherigen Erörterungen, dass mit Rücksicht auf eine richtige Erkennung des thatsächlichen Verhaltens der Gläser der Reduction der Brechungsindices, bez. der Aenderungen derselben auf den leeren Raum ganz besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden musste. Bei Flüssigkeiten pflegt man fast allgemein von einer diesbezüglichen Reduction abzusehen, da die Werthe ΔN und Δn in anbetracht der grossen Temperaturvariationen der Flüssigkeit gegenüber denen der Luft (Δn) sich nur wenig unterscheiden. Für die festen Körper aber würde durch eine solche Unterlassung der klare Einblick vollständig gestört werden, wie in einem weiter unten angeführten Falle thatsächlich geschehen ist.

§ 3. Das Beobachtungsverfahren.

In bezug auf die Justirung und Handhabung des Spectrometers sei auf die erwähnte Schrift¹⁾ verwiesen. Es erübrigt hier nur, eine Erörterung der für die Zwecke der Untersuchung geschaffenen besonderen Vorkehrungen hinzuzufügen.

Nachdem in bekannter Weise das Collimator-Fernrohr senkrecht zur Drehungsaxe des Theilkreises gestellt, der brechende Winkel (φ) und der Einfallswinkel (α_0) für gelbes Licht und für Zimmertemperatur ermittelt war, wurde das Prisma, wie oben p. 617 angegeben, mit der dritten Fläche ver-

¹⁾ Abbe, l. c.

sehen und nun das Spectrometer für die Temperaturuntersuchung eingerichtet.

Zu dem Ende wurde zuerst das mit drei Stellschrauben versehene Tischchen des Erhitzungsapparates auf das von allen Nebentheilen befreite Tischchen des Spectrometers aufgesetzt und nach Augenmaass die Justirung vorgenommen. Da die drei radial verlaufenden Schlitze, in welche die drei Spitzen zu stehen kommen, ein für allemal so justirt waren, dass die Mitte des Tischchens mit der Drehungsaxe zusammenfiel, so bedurfte es jedesmal nur einer kleinen Verschiebung der drei Stellschrauben, um eine etwa vorhandene Höhenabweichung der drei Rinnen zu beseitigen.

Als dann wurde das Prisma, dessen Hinterfläche zur Erhöhung der Reflexionsfähigkeit mit einem Quecksilberbeleg (einige Tropfen Quecksilber auf einem Stanniolstreifen verrieben und auf die Fläche gebracht) versehen war, lose auf den oberen Teller des Tischchens aufgesetzt. Der Teller war durch eine aufgeschraubte Metallplatte soweit erhöht, dass das Prisma gerade der Mitte des Objectivs gegenüberstand. Die Basisfläche des Prismas war entweder plan geschliffen oder kugelig ausgehöhlt, in welch' letzterem Falle das Prisma mit drei Punkten auf der Metallplatte zu stehen kam; in beiden Fällen erwies sich die Aufstellung als hinreichend sicher. Bei der Aufstellung des Prismas musste ferner darauf Bedacht genommen werden, dass durch die Drehung des Theilkreises keine seitlichen Verschiebungen der Prismenflächen gegen das Objectiv stattfanden, weil in einem solchen Falle stets andere Flächentheile zur Wirkung kommen und hierdurch leicht Fehler eintreten. Man kann diese Fehlerquelle aber dadurch vermeiden, dass man die Kante, in welcher die beiden Flächen II und III des Prismas zusammenstossen, mit der Drehungsaxe des Theilkreises zusammenfallen lässt.

Auf diese Weise vorgerichtet, konnte die genaue Justirung des Prismas (Ebene der drei Normalen parallel zur Ebene des Theilkreises) direct mit den drei Schrauben des Tellers des Erhitzungsapparates bewerkstelligt werden, ohne dass daraus ein Nachtheil für die Justirung des Tischchens selbst entstand. Die richtige Justirung des Prismas war erreicht, wenn die von den drei Flächen herrührenden Spaltbilder und die verschie-

denen Spectren bei einer Drehung des Theilkreises das Gesichtsfeld stets in gleicher Höhe hindurchgingen.

Schliesslich wurden die drei Rinnen mit Quecksilber gefüllt, neben das Prisma noch einige Stückchen Chlorcalcium gelegt und nun das überhängende Gehäuse soweit herabgelassen, dass eine völlige Trennung der beiden inneren Hohlräume erreicht war, ohne dass die freie Beweglichkeit des Tischchens eine Hemmung erfuhr. Alsdann war der Apparat zur Temperaturuntersuchung vorgerichtet.

Der Träger des Gehäuses wurde unmittelbar neben dem Spectrometer auf den gleichen Bock aufgestellt, auf welchem auch das Spectrometer stand. Dagegen fand die Kochflasche, zur Vermeidung einer directen Uebertragung von etwaigen durch das Kochen entstandenen Erschütterungen auf den Apparat, seitwärts auf einem besonderen Tisch ihren Platz.

In bezug auf die Justirung des Gehäuses sei noch bemerkt, dass durch ein leichtes Drehen desselben um die verticale Axe die von der Glasplatte herrührenden Reflexe möglichst an den Rand des Gesichtsfeldes gebracht werden.

Die Untersuchung wurde auf folgende Spectrallinien ausgedehnt:

$H_a (C),$	$N_a (D),$	$H_\beta (F)$ und	$H_\gamma (G').$
$\lambda = 0,6563$	0,5893	0,4862	0,4341

Ich hätte gern noch die rothe Kaliumlinie (0,7677) mit herangezogen, aber dieselbe ist meist so lichtschwach, dass das Auge bald ermüdet und dadurch die Genauigkeit der Einstellung auch für die übrigen Linien sehr geschädigt wird.

Die seitwärts vom Fernrohrocular hinter einem Schutzschirm aufgestellte Beleuchtungsvorrichtung bestand somit in einer Natriumflamme und einer Geissler'schen Wasserstoffröhre, letztere mit horizontaler Durchsicht hinter einem Linsensystem, welches die von der punktförmigen Lichtquelle der Röhre ausgehenden Strahlen convergirend zu dem Reflexionsprisma sandte und dieselben dort zu einem kreisförmigen Bilde vereinigte.

Die mikrometrische Durchmessung der Spectrums erfolgte stets in fünf oder sechs getrennten Versuchsreihen, wobei die Mikrometerschraube abwechselnd in der einen und in der anderen Richtung bewegt wurde. Auch kam die Schraube

jedesmal an anderen Stellen des Gewindes zur Geltung. Aus jeder einzelnen Reihe wurden dann die Abstände der Spectrallinien von der Marke, wie wir kurz die Einstellungsunterschiede bezeichnen wollen, gebildet und schliesslich die sämmtlichen Werthe durch Mittelbildung vereinigt. Dasselbe geschah bei höherer und niederer Temperatur.

Die Messung wurde gewöhnlich auf das zwischen der Zimmertemperatur und der Siedetemperatur des Wassers liegende Intervall beschränkt, in einigen Fällen auch Temperaturen unterhalb der Zimmertemperatur (im Winter durch Öffnen der Fenster erreicht) und die Temperatur des siedenden Aethers (35°) zur Beobachtung benutzt.

§ 4. Grenzen der Genauigkeit. Die vollständigen Daten einer Versuchsreihe.

Es wird am besten sein, die Besprechung der Genauigkeit direct an eine der von mir vorgenommenen Versuchsreihen anzuknüpfen.

Zunächst seien die Constanten des Apparates angeführt. Der Theilkreis ist in $\frac{1}{6}^\circ$ getheilt, die beiden Mikrometermikroskope gestatten eine directe Ablesung bis auf einzelne Secunden genau. Die zur Bewegung des Theilkreises dienende Mikrometerschraube ergab aus einer grösseren Anzahl von Messungen folgenden Werth für die Mikrometerconstante: 1 Umdrehung = $10' 1,6''$ gültig für etwa 20 Umdrehungen. Die Trommel ist in 100 Theile getheilt, ein Theil entspricht somit einem Winkelwerth von $6,016''$ Secunden.

Wir wählen als *Beispiel* folgende Versuchsreihe:

Baryt-Leichtflint. Schmelznummer des Glaswerkes: O. 527.

Brech. Winkel des Prismas $q = 31^\circ 46' 24''$ $N_D = 1,57175$.
Einfallswinkel für D $\alpha_0 = 55^\circ 51' 18''$

Die Marke liegt auf der rothen Seite des Spectrums. $b = 738$ mm.

1. *Zimmertemperatur:* $t_1 = 17,5^\circ \text{C}$.

Angaben der Trommeltheilung.

Marke	811,0	53,5	87,5	40,5	7,4
H _a	922,5	65,0	99,2	51,9	19,1
Na	1027,6	70,7	5,0	57,7	25,1
H _{β}	1287,2	29,8	63,6	16,7	83,6
H _{γ}	1502,4	44,6	79,0	31,6	98,7

Hieraus ergeben sich die folgenden Werthe für den Abstand der vier Spectrallinien von der Marke:

						Mittel	w. Fehler
H _α	111,5	11,5	11,7	11,4	11,7	111,56	± 0,04 = ± 0,24"
Na	216,6	17,2	17,5	17,2	17,7	217,24	± 0,12 = ± 0,72
H _β	476,2	76,3	76,1	76,2	76,2	476,20	± 0,02 = ± 0,12
H _γ	691,4	91,1	91,5	91,1	91,3	691,28	± 0,05 = ± 0,30

Für den Winkelabstand der Spectrallinien von der D-Linie (β) und die mittelst der obigen Gleichung (II) berechneten Unterschiede der Brechungsindices gelten folgende Zahlen:

Spectralbezirk	β		$N - N_D$
	in Trommelth.	in Winkelwerth	
C — D	— 105,68	— 10' 35,9"	— 0,00329,4
D — F	258,96	25' 38,1"	0,00800,7
D — G'	474,04	47' 31,6"	0,01458,6

Die hieraus abgeleiteten optischen Constanten finden sich auf p. 629 in der Tabelle, in welcher die bezüglichlichen Werthe der sämtlichen übrigen Körper zusammengestellt sind.

2. Temperatur des siedenden Wassers: $t_2 = 99,2^\circ$.

Angaben der Trommeltheilung.

Marke	713,6	91,1	20,9	85,2	77,3
H _α	828,2	5,2	35,0	99,5	91,3
Na	934,8	11,4	41,1	6,0	97,5
H _β	1195,0	72,0	2,1	66,5	58,9
H _γ	1412,2	88,9	18,3	83,2	75,3

Abstand der Spectrallinien von der Marke.

						Mittel	w. Fehler
H _α	114,6	14,1	14,1	14,3	14,0	114,22	± 0,07 = ± 0,42"
Na	221,2	20,3	20,2	20,8	20,2	220,54	± 0,13 = ± 0,78
H _β	481,4	80,9	81,2	81,3	81,6	481,28	± 0,06 = ± 0,36
H _γ	698,6	97,8	97,4	98,0	98,0	697,96	± 0,13 = ± 0,78

Die vorstehenden Zahlen geben ein sehr deutliches Bild von der ausserordentlichen Genauigkeit der Beobachtungsmethode. Die fünf Versuchsreihen für jede der beiden Tempe-

raturen stimmen bis auf Zehntel-Trommeltheile unter sich überein. Der wahrscheinliche Fehler des Mittelwerthes ist meist geringer als $\frac{1}{10}$ Trommeltheil, im Winkelmass gerechnet also ungefähr gleich $\frac{1}{2}$ Secunde. Die vorstehende Beobachtungsreihe ist zwar eine der besten der von mir erledigten, aber die übrigen stehen dieser nur wenig nach.

Die vorstehenden Angaben mögen zugleich zur Beurtheilung der Genauigkeit der in folgender Tabelle mitgetheilten Zahlenwerthe dienen. Die erste Columne enthält die durch die Temperaturerhöhung bewirkte Verschiebung der Spectrallinien (die Verschiebung findet in der Richtung nach dem blauen Ende des Spectrums statt und ist deshalb positiv zu rechnen), die zweite und dritte enthalten die Aenderungen der relativen Brechungsindices für das ganze Temperaturintervall, bez. für 1°C. , und endlich sind in der letzten Columne die mit Hülfe der Reductionsformel (V) berechneten Werthe für $\Delta\mathfrak{R}$, die Aenderung des absoluten Brechungsindex für 1°C. Temperaturerhöhung, mitgetheilt. Die bezüglichen Werthe sind:

Linie	Verschiebung δ	$N_2 - N_1$	ΔN in Einheiten der 5. Decimale	$\Delta\mathfrak{R}$
C	2,66 = 16,2''	- 0,00008,40	- 0,103	- 0,008
D	3,30 = 19,8''	10,23	0,125	0,014
F	5,08 = 30,7''	15,69	0,192	0,080
G'	6,68 = 40,3''	20,40	0,250	0,137

§ 5. Die übrigen Versuchsreihen.

Im ganzen wurden 12 verschiedene Glassorten aus dem glastechnischen Laboratorium untersucht, welche meist charakteristische Typen darstellen; ferner Quarz, Flussspath, Steinsalz und Sylvin.

Hr. Dr. Schott hatte die Freundlichkeit, mir folgende Angaben über die chemische Zusammensetzung der Gläser zu machen:

S. 57 (Fabrik-Nummer). *Schwerstes Silicatflint.*

Annähernd PbO 82 SiO₂ 18 Proc.

O. 165. *Schweres Silicatflint.*

PbO K₂O SiO₂ As₂O₃ Mn₂O₃
69 2,5 28,36 0,1 0,04 Proc.

40*

O. 544. *Gewöhnliches Silicatflint.*

PbO	K ₂ O	Na ₂ O	SiO ₂	Mn ₂ O ₃	As ₂ O ₅
45,2	8,0	0,5	45,83	0,07	0,4 Proc.

O. 154. *Leichtes Silicatflint.*

PbO	K ₂ O	Na ₂ O	B ₂ O ₃	SiO ₂	Mn ₂ O ₃	As ₂ O ₅
33,0	8,0	3,0	1,5	54,22	0,08	0,2 Proc.

O. 658. *Leichtes Borosilicatflint.*

PbO 25, B₂O₃ 31, SiO₂ 32,7, kleinere Mengen Alkalien und Thonerde.

O. 527. *Baryt Leichtflint.*

BaO 20, PbO 10, ZnO 7, SiO₂ 51,6, Rest Alkalien.

O. 211. *Schweres Bariumsilicat-Crown.*

BaO 29, ZnO 10,3, SiO₂ 48,7, kleinere Mengen Alkalien und Borsäure.

O. 1022. *Gewöhnliches Silicat-Crown.*

K ₂ O	Na ₂ O	BaO	ZnO	B ₂ O ₃	M ₂ O ₃	As ₂ O ₅	SiO ₂
15,0	5,0	9,6	2,0	2,5	0,1	0,4	65,4 Proc.

S. 205. *Leichtes Borat-Crown.*

B₂O₃ 69, Al₂O₃ 18, Na₂O, Rest Baryt und etwas Arsensäure.

O. 627. *Borosilicat-Crown.*

K ₂ O	Na ₂ O	ZnO	B ₂ O ₃	Mn ₂ O ₃	As ₂ O ₅	SiO ₂
9,5	10,0	2,0	10,0	0,07	0,2	68,24 Proc.

S. 40. *Phosphat-Crown.*

P₂O₅ 59,5, BaO 28, kleinere Mengen Borsäure und Arsensäure; ferner 3 Proc. Didymoxyd.

O. 225. *Leichtes Phosphat-Crown.*

P₂O₅ 70,5, K₂O 12, Al₂O₃ 10, kleinere Mengen Borsäure, Magnesium und Arsensäure.

Nach meinen Messungen ergaben sich zunächst für die optischen Constanten (Brechung und Dispersion) der verschiedenen Glassorten und der übrigen angegebenen Substanzen die in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellten Werthe. Unseren obigen Ausführungen entsprechend ist der Brechungsindex selbst nur für die *D*-Linie angegeben; zur Kennzeichnung der Dispersion dienen die Differenzen der Brechungsindices für die Intervalle *C* — *F*, *C* — *D*, *D* — *F* und *F* — *G'*. Das erste Intervall umfasst den mittleren sichtbaren Theil des Spectrums und bezeichnet die *mittlere Dispersion* der Substanz. Diese

und der Brechungsindex für D bestimmen die Grösse der sogenannten *relativen Dispersion*, die sich durch den Ausdruck

$$\frac{1}{\nu} = \frac{N_F - N_G}{N_D - 1}$$

darstellt. Die mit ν überschriebene Columnne der Tabelle enthält die reciproken Werthe dieser Dispersionsgrösse, und wie man sieht, sind in den beiden Gruppen die einzelnen Substanzen in ihrer Reihenfolge so angeordnet, dass diejenigen mit grösserer relativer Dispersion (kleinerem ν) denen mit kleinerer relativer Dispersion (grösserem ν) vorangehen.

Bezeichnung	N_D	Mittl. Disper- sion $C - F$	$\nu =$ $\frac{N_D - 1}{N_F - N_G}$	Partielle Dispersion		
				$C - D$	$D - F$	$F - G'$
S. 57.	1,9625	0,04877	19,7	0,01336 0,274	0,03541 0,728	0,03235 0,663
O. 165.	1,7545	0,02738	27,6	0,00768 0,281	0,01970 0,720	0,01720 0,628
O. 544.	1,6130	0,01652	37,1	0,00472 0,286	0,01180 0,714	0,01004 0,608
O. 154.	1,5710	0,01324	43,1	0,00382 0,289	0,00942 0,711	0,00789 0,596
O. 658.	1,5452	0,01084	50,3	0,00320 0,296	0,00764 0,705	0,00622 0,574
O. 527.	1,5718	0,01130	50,6	0,00329 0,291	0,00801 0,709	0,00658 0,582
O. 211.	1,5727	0,00988	58,0	0,00295 0,298	0,00693 0,701	0,00560 0,567
O. 1022.	1,5173	0,00860	60,2	0,00254 0,295	0,00606 0,705	0,00475 0,552
S. 205.	1,5075	0,00838	60,6	0,00255 0,305	0,00583 0,696	0,00459 0,548
O. 627.	1,5128	0,00806	63,7	0,00241 0,299	0,00564 0,700	0,00449 0,557
S. 40.	1,5619	0,00845	66,5	0,00253 0,299	0,00592 0,701	0,00469 0,555
O. 225.	1,5160	0,00734	70,3	0,00219 0,299	0,00515 0,701	0,00402 0,548
Steinsalz v. Stassfurt	1,5440	0,01267	42,9	0,00367 0,290	0,00900 0,710	0,00748 0,590
Sylvin v. Stassfurt	1,4904	0,01110	44,2	0,00321 0,289	0,00789 0,711	0,00656 0,591

Bezeichnung	N_D	Mittl. Disper- sion $C - F$	$\nu =$ $\frac{N_D - 1}{N_F - N_C}$	Partielle Dispersion		
				$C - D$	$D - F$	$F - G'$
Quarz, extra- ord. Strahl	1,5533	0,00803	68,9	0,00243 0,303	0,00560 0,697	0,00438 0,546
Quarz, ord. Strahl	1,5442	0,00777	70,1	0,00236 0,304	0,00541 0,696	0,00425 0,547
Flussspath	1,4399	0,00452	96,1	0,00137 0,303	0,00315 0,697	0,00246 0,590

Die übrigen Intervalle dienen zur Charakteristik für den Verlauf der Dispersion in den verschiedenen Spectralregionen (partielle Dispersion). Die unterhalb dieser Zahlenwerthe stehenden und mit kleineren Ziffern angeführten Zahlen bedeuten die jedesmaligen Quotienten, die man erhält, wenn man die Differenz der Brechungsindices für das betreffende Theilintervall durch die mittlere Dispersion $C - F$ dividirt. Eine Zunahme dieser Quotienten gegenüber denjenigen anderer Substanzen deutet immer auf eine relative Steigerung der (partiellen) Dispersion in jener Spectralregion, mit anderen Worten, auf eine dort stattfindende Dehnung des Spectrums. So z. B. zeigt gleich die erste Glassorte (S. 57) im Vergleich zu allen folgenden Körpern eine auffallend starke relative Dispersionssteigerung im Blau (0,663), während das Roth (0,274) einen relativ geringen Spectralraum einnimmt. Etwas geringer, aber nicht minder charakteristisch für das optische Verhalten, sind die bei den übrigen Körpern auftretenden Schwankungen der bezüglichen Zahlenwerthe dieser partiellen Dispersionen.

Die Ergebnisse der *Temperaturuntersuchung* sind in den folgenden Tabellen enthalten.

Es bedeuten wieder, wie früher, die unter „Abstände“ stehenden Zahlenwerthe die durch Messung mit der Mikrometerschraube ermittelten Einstellungsunterschiede zwischen Spectrallinie und Marke in Trommeltheilen. Die Verschiebung ist in Trommeltheilen und Winkelaass angegeben. Endlich bedeutet ΔN die Aenderung des relativen, $\Delta \mathfrak{N}$ die Aenderung des absoluten Brechungsindex, in Einheiten der fünften Decimale und gültig für die Mitteltemperatur.

Die einzelnen Versuchsreihen sind in gleicher Reihenfolge

angeordnet wie in obiger Tabelle. Etwaige Bemerkungen sind an Ort und Stelle beigefügt. In denjenigen Fällen, in welchen die Temperaturvariation der Grösse $\Delta \mathfrak{N}$ festgestellt wurde, ist nur der Werth für $\Delta \mathfrak{N}_0$ angegeben und ausserdem die gefundene Temperaturformel.

S. 57. *Schwerstes Silicatiflint.*

Brech. Winkel des Prismas $\varphi = 17^\circ 56' 52''$

Einfallswinkel für D $\alpha_0 = 37^\circ 12' 41''$.

Die Marke liegt auf der rothen Seite des Spectrums. Barom. = 739 mm.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{58,2^\circ}$
	18,5°	99,2°				
<i>C</i>	710,8	725,1	14,3	1' 26,1''	1,336	1,204
<i>D</i>	887,7	904,4	17,0	1' 42,3''	1,588	1,449
<i>F</i>	1360,0	1384,2	24,2	2' 25,6''	2,231	2,090
<i>G'</i>	1795,9	1828,2	32,3	3' 14,3''	2,954	2,810

O. 165. *Schweres Silicatiflint.*

$\varphi = 29^\circ 10' 25''$

$\alpha_0 = 58^\circ 47' 15''$.

Die Marke liegt zwischen *C* und *D*. $b = 750$ mm.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{56,7^\circ}$
	13,8°	99,6°				
<i>C</i>	- 66,3	- 43,6	22,7	2' 16,5''	0,829	0,700
<i>D</i>	179,9	205,0	25,1	2' 31,0''	0,906	0,775
<i>F</i>	825,2	859,0	33,8	3' 23,3''	1,182	1,051
<i>G'</i>	1406,5	1449,2	42,7	4' 16,8''	1,443	1,311

O. 544. *Gew. Silicatiflint.*

$\varphi = 33^\circ 1' 56''$

$\alpha_0 = 61^\circ 32' 57''$.

Die Marke liegt zwischen *C* und *D*. $b = 735$.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{55,1^\circ}$	$\Delta \mathfrak{N}_0$
	11,1°	99,1°					
<i>C</i>	- 148,8	- 136,4	12,8	1' 14,6''	0,360	0,244	0,113
<i>D</i>	35,5	49,3	13,8	1' 23,0''	0,397	0,281	0,158
<i>F</i>	504,1	522,1	18,0	1' 48,3''	0,506	0,389	0,264
<i>G'</i>	911,2	933,8	22,6	2' 15,8''	0,621	0,503	0,377

$\Delta \mathfrak{N}_0$ wurde durch weitere Beobachtung der Abstände bei $24,0^\circ$ erhalten. Es ist:

$$\Delta \mathfrak{N}_t = \Delta \mathfrak{N}_0 + 0,0023 \cdot t.$$

O. 154. *Leichtes Silicatlant.*

$$\varphi = 35^{\circ} 11' 35''$$

$$\alpha_0 = 64^{\circ} 52' 56''.$$

Die Marke liegt auf der rothen Seite des Spectrums. $b = 738$.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{58,4^{\circ}}$
	17,9 ^o	99,2 ^o				
C	144,1	156,8	12,7	1' 16,4''	0,336	0,225
D	321,0	335,2	14,2	1' 25,5''	0,372	0,261
F	765,7	783,2	17,5	1' 45,3''	0,446	0,334
G'	1148,2	1169,1	20,9	2' 5,7''	0,520	0,407

O. 658. *Leichtes Borosilicatlant.*

$$\varphi = 29^{\circ} 40' 23''$$

$$\alpha_0 = 49^{\circ} 54' 18''.$$

Die Marke liegt zwischen D und F. $b = 738$.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{59,2^{\circ}}$
	19,3 ^a	99,2 ^o				
C	- 262,2	- 270,1	7,9	0' 47,5''	0,376	0,267
D	- 177,1	- 185,8	8,6	0' 51,7''	0,408	0,299
F	26,2	16,3	9,9	0' 59,5''	0,466	0,356
G'	192,8	181,7	11,1	1' 6,8''	0,520	0,410

O. 527. *Baryt Leichtflint*, ausführlich im vorigen Paragraphen enthalten.

O. 211. *Schweres Barium Silicat-Crown.*

$$\varphi = 31^{\circ} 31' 43''$$

$$\alpha_0 = 55^{\circ} 19' 32''.$$

Die Marke liegt auf der rothen Seite des Spectrums. $b = 737$.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{57,8^{\circ}}$
	16,6 ^o	99,1 ^o				
C	13,7	17,2	3,5	0' 21,0''	0,132	0,021
D	106,5	110,5	4,0	24,1''	0,151	0,040
F	326,0	331,7	5,7	34,3''	0,215	0,103
G'	504,8	511,6	6,8	40,9''	0,255	0,142

O. 1022. *Gew. Silicat-Crown.*

$$\varphi = 38^{\circ} 5' 40''$$

$$\alpha_0 = 55^{\circ} 56' 41''.$$

Die Marke liegt zwischen D und F. $b = 743$.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{59,3^{\circ}}$
	19,0 ^o	99,7 ^o				
C	- 128,4	- 128,9	- 0,5	0' 3,0''	- 0,020	- 0,129
D	- 43,1	- 42,9	0,2	0' 1,2''	0,004	- 0,105
F	158,1	159,7	1,4	0' 8,4''	0,050	- 0,060
G'	321,2	324,0	2,8	0' 16,8''	0,101	- 0,010

S. 205. *Leichtes Borat-Crown.*

$$\varphi = 33^\circ 4' 58''$$

$$\alpha_0 = 55^\circ 22' 30''.$$

Die Marke liegt auf der rothen Seite des Spectrums. $b = 747$.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{60,0^\circ}$
	20,5°	99,5°				
<i>C</i>	73,1	74,2	1,1	0' 6,6''	0,040	- 0,066
<i>D</i>	157,0	157,9	0,9	0' 5,4''	0,033	- 0,074
<i>F</i>	349,7	351,7	2,0	0' 12,0''	0,075	- 0,033
<i>G'</i>	502,6	505,4	2,8	0' 16,8''	0,106	- 0,003

O. 627. *Borosilicat-Crown.*

$$\varphi = 33^\circ 14' 50''$$

$$\alpha_0 = 56^\circ 2' 5''$$

Die Marke liegt zwischen *C* und *D*. $b = 757$.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{52,8^\circ}$	$\Delta \mathfrak{N}_{0^\circ}$
	5,8°	99,9°					
<i>C</i>	- 65,0	- 57,6	7,4	0' 44,5''	0,233	0,119	0,065
<i>D</i>	16,1	24,1	8,0	0' 48,1''	0,251	0,137	0,105
<i>F</i>	206,0	215,4	9,4	0' 56,5''	0,293	0,178	0,130
<i>G'</i>	357,5	368,1	10,6	1' 3,8''	0,329	0,213	0,175

Die Werthe für $\Delta \mathfrak{N}_0$ wurden durch Beobachtung der Abstände für die weiteren Temperaturen: $9,0^\circ$, $35,0^\circ$, $18,7^\circ$, $21,1^\circ$ und $100,0^\circ$ erhalten. Die Temperaturvariation wird dargestellt durch

$$\Delta \mathfrak{N}_t = \Delta \mathfrak{N}_0 + 0,0008 \cdot t.$$

S. 40. *Didymhaltiges Phosphat-Crown.*

$$\varphi = 29^\circ 35' 1''$$

$$\alpha_0 = 50^\circ 27' 14''$$

Die Marke liegt auf der rothen Seite des Spectrums. $b = 749$.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{60,3^\circ}$
	21,0°	99,6°				
<i>C</i>	378,4	379,2	- 4,2	- 0' 25,3''	- 0,204	- 0,314
<i>D</i>	445,5	441,5	- 4,0	- 0' 24,1''	- 0,194	- 0,305
<i>F</i>	603,3	600,5	- 2,8	- 0' 16,8''	- 0,134	- 0,246
<i>G'</i>	729,0	726,4	- 2,6	- 0' 15,6''	- 0,124	- 0,237

O. 225. *Leichtes Phosphat-Crown.*

$$\varphi = 35^\circ 2' 28''$$

$$\alpha_0 = 60^\circ 30' 28''.$$

Die Marke liegt am rothen Ende des Spectrums. $b = 751$.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{58,10}$
	16,6°	99,7°				
C	31,8	28,8	- 3,0	- 0' 18,0''	- 0,093	- 0,202
D	119,3	116,7	- 2,6	- 0' 15,6''	- 0,080	- 0,190
F	326,2	324,3	- 1,9	- 0' 11,4''	- 0,057	- 0,168
G'	489,4	488,4	- 1,0	- 0' 6,0''	- 0,031	- 0,142

Steinsalz von Stassfurt.

$$\varphi = 26^\circ 17' 20''$$

$$\alpha_0 = 43^\circ 8' 43''.$$

Die Marke liegt im Blau. $b = 743$.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{58,59}$
	18,2°	99,4°				
C	- 441,6	- 502,9	- 61,3	- 6' 8,8''	- 3,639	- 3,749
D	- 365,3	- 426,6	- 61,2	- 6' 8,5''	- 3,629	- 3,739
F	- 177,4	- 237,4	- 60,0	- 6' 1,0''	- 3,537	- 3,648
G'	- 20,7	- 79,9	- 59,2	- 5' 56,0''	- 3,473	- 3,585

Mit diesen Daten stimmen die Angaben von Stefan (l. c.) sehr gut überein:

Linie	12,2°—34°	18,8°—91,6°	20,5°—93,7°
B	—	- 3,74	- 3,74
D	- 3,72	- 3,76	- 3,70
F	—	- 3,65	- 3,62

Sylvin von Stassfurt.

$$\varphi = 30^\circ 1' 49''$$

$$\alpha_0 = 48^\circ 14' 3''.$$

Die Marke liegt am rothen Ende des Spectrums. $b = 744$.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{59,59}$
	19,6°	99,4°				
C	233,8	160,6	- 73,2	- 7' 20,3''	- 3,575	- 3,681
D	316,3	243,7	- 72,6	- 7' 16,7''	- 3,535	- 3,641
F	520,3	448,0	- 72,3	- 7' 14,9''	- 3,498	- 3,605
G'	690,9	619,2	- 71,7	- 7' 11,3''	- 3,449	- 3,557

Stefan gibt an:

Linie	15°—42,7°	21°—94°
<i>B</i>	—	— 3,49
<i>D</i>	— 3,43	— 3,46
<i>F</i>	—	— 3,46

Quarz, ord. Strahl senkrecht zur optischen Axe.

Die optische Axe liegt parallel zur brechenden Kante des Prismas (vgl. p. 618).

$$\varphi = 29^\circ 58' 20''$$

$$\alpha_0 = 50^\circ 29' 6''.$$

Die Marke liegt am rothen Ende des Spectrums. $b = 743$.

Linie	Abstände		Verschiebung Δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{50,6^\circ}$
	19,8°	99,4°				
<i>C</i>	107,3	95,8	— 11,5	— 1' 9,2''	— 0,540	— 0,649
<i>D</i>	170,8	159,5	— 11,3	— 1' 8,0''	— 0,529	— 0,638
<i>F</i>	316,7	306,2	— 10,5	— 1' 3,2''	— 0,489	— 0,599
<i>G'</i>	431,9	421,9	— 10,0	— 1' 0,2''	— 0,466	— 0,577

Quarz, ausserord. Strahl, senkrecht zur opt. Axe. Dasselbe Prisma.

<i>C</i>	350,5	336,5	— 14,0	— 1' 24,3''	— 0,651	— 0,761
<i>D</i>	416,5	402,6	— 13,9	— 1' 23,6''	— 0,644	— 0,754
<i>F</i>	468,9	555,8	— 13,1	— 1' 18,8''	— 0,604	— 0,715
<i>G'</i>	688,8	676,1	— 12,7	— 1' 16,4''	— 0,582	— 0,694

Zum Vergleich der vorstehenden Daten mit den Resultaten anderer Beobachter seien zunächst die Messungen von Fizeau (l. c.) angeführt:

	ord. Strahl	ausserord. Strahl
für $t = 20^\circ$	$\Delta \mathfrak{N}_D = - 0,537$	— 0,628
$t = 30^\circ$	— 0,548	— 0,644
$t = 40^\circ$	— 0,559	— 0,661.

Das von Fizeau angewandte Verfahren gründet sich bekanntlich auf die Messung der durch die Temperatur bewirkten Verschiebung von Newton'schen Streifen. Die Methode setzt die Kenntniss der Ausdehnungscoefficienten des Quarzes senkrecht und parallel zur optischen Axe voraus. Hr. Dufet¹⁾ hat nun aber nachgewiesen, dass, wenn man statt der von Fizeau zur Berechnung der Temperaturvariationen benutzten Ausdehnungscoefficienten die durch die Arbeiten von Benoit²⁾

1) l. c. p. 47.

2) Benoit, Mesures de dilatations par la méthode de Fizeau. Mem. du bureau international des poids et mesures 6. p. 190. 1888.

genauer bekannt gewordenen Werthe benutzt, die obigen Werthe sich nicht unbeträchtlich verschieben. Auf diese Weise neu berechnet erhielt Dufet aus den Fizeau'schen Beobachtungen:

$$(\text{im Mittel}) \quad - 0,600 \quad - 0,714,$$

wobei noch als besonders bemerkenswerth hervorzuheben ist, dass eine Abhängigkeit dieser Werthe von der Temperatur, wie sie in den obigen Angaben auftritt, jetzt nicht mehr vorhanden ist.

Als Resultat seiner eigenen Messungen, die ebenfalls mit Hilfe eines Interferenzverfahrens gewonnen sind, gibt Dufet an:

$$\Delta n_t = -(0,625 + 0,00005 t) \quad - (0,722 + 0,00037 t)$$

Hieraus geht hervor, dass die Veränderung der Grösse Δn mit der Temperatur zwar im Sinne einer Zunahme des absoluten Werthes erfolgt, aber doch erheblich geringer ist, als es nach den früheren Fizeau'schen Zahlen den Anschein hatte.

Die in obiger Tabelle (für die *D*-Linie) angeführten Werthe sind, wie man sieht, in *sehr guter* Uebereinstimmung mit den vorstehenden Resultaten.

Grössere Abweichungen zeigen die von Hrn. G. Müller¹⁾ gefundenen Temperaturvariationen, welche durch directe spectrometrische Bestimmung der Brechungsindices bei verschiedenen Temperaturen erhalten wurden. Doch sind die Unterschiede zwischen seinen Resultaten und den Fizeau'schen nicht so gross, wie Hr. Müller annimmt. Die Angaben des Hrn. Müller bedürfen nämlich, bevor man sie mit den Fizeau'schen Zahlen zusammenstellt und vergleicht, noch der Reduction auf den leeren Raum oder auf Luft von constanter Temperatur, ein Umstand, der von Hrn. Müller übersehen wurde. Führt man nach den oben besprochenen Grundsätzen diese Reduction aus, so erhält man statt der Angaben von Müller

$$- 0,447 \quad - 0,471 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(Mittel der für verschiedene Strahlen} \\ \text{gemachten Beobachtungen und gültig} \\ \text{für eine Mitteltemperatur von } 10^{\circ} \text{ C.)} \end{array} \right.$$

die folgenden Werthe:

$$- 0,601 \quad \text{und} \quad - 0,626,$$

¹⁾ l. c.

welche also von den Fizeau'schen sich nur wenig unterscheiden.

Die gleiche Correctur ist an den von Hrn. Müller mitgetheilten Temperaturvariationen einiger Gläser und des ordentlichen Strahles von Kalkspath anzubringen. Gegenüber dem von Fizeau für Kalkspath ord. Strahl gefundenen Werth 0,057, der auch durch die Vogel'schen Messungen bestätigt wird, ist der von Hrn. Müller angegebene Werth 0,234 viel zu gross, während die Reduction auf den leeren Raum für $\Delta \mathfrak{N}$ den mit den obigen Angaben fast identischen Werth 0,077 ergibt.

Flussspath.

$$\varphi = 25^{\circ} 20' 43''$$

$$\alpha_0 = 37^{\circ} 51' 57''.$$

Die Marke liegt auf der rothen Seite des Spectrums. $b = 748$.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{60,5^{\circ}}$	$\Delta \mathfrak{N}_{20,1^{\circ}}$ (5,0—35,2°)
	21,5°	99,6°					
C	60,1	43,9	-16,2	-1' 37,5''	-1,118	-1,220	-1,421
D	85,5	69,5	-16,0	-1' 36,3''	-1,104	-1,206	-1,420
F	144,1	128,6	-15,5	-1' 33,3''	-1,067	-1,170	-1,347
G'	190,0	174,9	-15,1	-1' 30,9''	-1,039	-1,142	—

Fizeau erhielt für $33,5^{\circ}$ den Werth $-1,36$ und nach den Stefan'schen Messungen ist $\Delta \mathfrak{N}$ für eine Mitteltemperatur von $57,3^{\circ}$.

$$D - 1,24; F - 1,23; H - 1,24.$$

Man sieht bei einem Vergleich der Werthe untereinander, dass eine nicht unbeträchtliche Veränderung von $\Delta \mathfrak{N}$ mit der Temperatur stattfindet. Dieselbe erfolgt aber in umgekehrtem Sinne wie bei Quarz. Hier nimmt der absolute Werth der Grösse $\Delta \mathfrak{N}$ mit wachsender Temperatur ab, während für Quarz eine geringe Zunahme constatirt wurde.

§ 6. Discussion der Beobachtungsergebnisse.

Wir stellen zunächst die Ergebnisse der Messungen in nachfolgender Tabelle übersichtlich zusammen. Und um endlich auch einen bequemen Ueberblick über den relativen Verlauf der Temperaturvariationen von Farbe zu Farbe erhalten, sind die sämmtlichen beobachteten Werthe $\Delta \mathfrak{N}$ in Curven graphisch

dargestellt (Fig. 2 Taf. VIII). In dieser Figur gelten die reciproken Werthe der Quadrate der Wellenlängen als Abscissen. Als Ordinaten sind die beobachteten Werthe Δn eingezeichnet, und zwar so, dass die positiven Grössen von dem Nullstrich nach oben, die negativen von demselben Nullstrich nach unten gezählt sind.

Was auf den ersten Blick in die Augen fällt, ist der übereinstimmende Charakter in dem Verlauf sämtlicher Curven. Man sieht, dass alle Curven, unbekümmert um den Nullstrich, nach dem blauen Ende des Spectrums mehr oder weniger ansteigen, sowohl bei den Curven oberhalb, als auch bei denjenigen unterhalb des Nullstrichs. Wir können also den Satz aussprechen, dass für alle von uns untersuchten Substanzen eine Steigerung des Dispersionsvermögens mit wachsender Temperatur eintritt. Denn da, wo das Brechungsvermögen mit der Temperatur zunimmt, sind die bezüglichen Temperaturvariationen im Blau grösser als im Roth, und in Fällen, wo die Brechungsindices mit der Temperatur abnehmen, ist die Abnahme im Blau kleiner als im Roth; d. h. also, in allen Fällen wird das Spectrum gedehnt. Auch die als Specialfall immerhin bemerkenswerthe Erscheinung, dass für eine der untersuchten Glassorten (O. 527) im Roth negative, im Blau positive Aenderungen vorliegen und für einen mittleren Spectralbezirk der Einfluss der Temperatur auf den Brechungsindex ganz verschwindet, ist wie alle anderen im Sinne einer Dispersionszunahme.

Dieselbe Erscheinung hat Vogel (l. c. 1885) für einige von ihm untersuchte Gläser und für den ordentlichen und ausserordentlichen Strahl von Kalkspath beobachtet. Dagegen schienen nach den Untersuchungen von Stefan (1871) für die Körper Flusspath, Sylvin und Steinsalz jede Dispersionsänderung ausgeschlossen zu sein und für Quarz hatte Hr. Müller (1885) sogar eine geringe Abnahme der Dispersion aus seinen Beobachtungen abgeleitet.

Ben
S. 57.
Sil
O. 165
Sil
O. 544
liches
O. 15
Si
O. 65
Bor
O. 5
L
O. 21
Barium
O. 102
liches
S. 20
Bo
O. 627
S. 40.
Phos
O. 2
Phos
Steinsal
Sylvin
Quar
sen
Quar
Strahl
I
Kalksp
(na
Kalksp

Änderungen des Brechungsindices und der Dispersion mit der Temperatur (vgl. Fig. 2 Taf. VIII).

Benennung	Mitteltemperatur	C	D	F	G'	relative Steigerung d. Dispersion $-\frac{dn}{n} \cdot 100$
in Einheiten der 5. Decimale						
S. 57. Schwerstes Silicatflint	58,8°	1,204	1,447	2,090	2,810	0,0166
O. 165. Schweres Silicatflint	56,7°	0,700	0,775	1,051	1,311	0,0118
O. 544. Gewöhnliches Silicatflint	55,1°	0,244	0,281	0,389	0,503	0,0083
O. 154. Leichtes Silicatflint	58,4°	0,225	0,261	0,334	0,407	0,0078
O. 658. Leichtes Borosilicatflint	59,2°	0,267	0,299	0,356	0,410	0,0077
O. 527. Baryt Leichtflint	58,3°	-0,008	0,014	0,080	0,137	0,0079
O. 211. Schweres Barium Silicat-Crown	57,8°	0,021	0,040	0,103	0,142	0,0082
O. 1022. Gewöhnliches Silicat-Crown	59,3°	-0,129	-0,105	-0,060	-0,010	0,0082
S. 205. Leichtes Borat-Crown	60,0°	-0,066	-0,074	-0,033	-0,003	0,0041
O. 627. Borosilicat-Crown	52,8°	0,119	0,137	0,178	0,213	0,0072
S. 40. Didymhaltiges Phosphat-Crown	60,3°	-0,314	-0,305	-0,246	-0,237	0,0086
O. 225. Leichtes Phosphat-Crown	58,1°	-0,202	-0,190	-0,168	-0,142	0,0049
Steinsalz von Stassfurt	58,8°	-3,749	-3,739	-3,648	-3,585	0,0148
Sylvin von Stassfurt	59,5°	-3,681	-3,641	-3,605	-3,557	0,0148
Quarz ord. Strahl senkr. zur Axe	59,6°	-0,649	-0,638	-0,599	-0,577	0,0076
Quarz ausserord. Strahl senkr. zur Axe	59,6°	-0,761	-0,754	-0,715	-0,694	0,0071
Flusspath	60,5°	-1,220	-1,206	-1,170	-1,142	0,0137
Kalkspath ord. Strahl (nach Vogel)	103°	0,071	0,081	0,091	0,100	0,0137
Kalkspath ausserord. Strahl	103°	1,012	1,020	1,073	1,090	0,0078

Bestimmte, im folgenden näher ausgeführte Gründe hatten mich veranlasst, diese letzteren vier Körper einer erneuten experimentellen Untersuchung zu unterwerfen, und Dank der hohen Leistungsfähigkeit der angewandten Methode hat sich meine Vermuthung, dass auch bei diesen Körpern eine Dispersionsänderung im Sinne einer Zunahme vorhanden sein müsse, in unzweideutiger Weise bestätigt.

Die Dispersionszunahme mit wachsender Temperatur scheint sogar sämmtlichen durchsichtigen festen Körpern eigen zu sein, denn die gleiche Erscheinung hat kürzlich Offret¹⁾ an zehn ein- und zweiaxigen Krystallen (in der Anmerkung p. 610 namhaft gemacht) ebenfalls beobachtet. Flüssigkeiten und Gase zeigen bekanntlich das entgegengesetzte Verhalten, die Dispersion nimmt ab und bleibt nur in wenigen Fällen constant.

Wir stehen somit vor einer Erscheinung, welche mit Rücksicht auf den theoretischen Zusammenhang von Brechungsvermögen und Dichte nicht weniger auffallend ist als das anfangs erwähnte Auftreten von positiven Temperaturvariationen, die uns aber den Schlüssel zu der Erklärung gegeben hat. Ich werde im nächsten Theile versuchen nachzuweisen, dass die Erscheinung als eine Wirkung der anomalen Dispersion aufzufassen ist, hervorgerufen durch das mit der Temperatur wachsende Absorptionsvermögen der durchsichtigen festen Körper.

Ehe wir im einzelnen auf diese Erklärung selbst eingehen, wollen wir vorher noch einen kurzen Blick auf die Stärke der Dispersionszunahme für die einzelnen Körper werfen. Schon aus dem grösseren oder geringeren Abfall der einzelnen Curven in obiger Figur geht hervor, dass die Zunahme der Dispersion nicht für alle Körper die gleiche ist. Dieselbe ist offenbar am stärksten bei den Flintgläsern, am geringsten bei den Phosphat- und Boratgläsern und bei Quarz. Die relative Stärke dieser Dispersionssteigerung, bezogen auf die p. 629 erwähnte Grösse $1/\nu$, welche uns als Maass der Dispersion diene, wird durch den Ausdruck $-\Delta\nu/\nu$ dargestellt, unter $\Delta\nu$ die Aenderung von ν pro 1°C . Temperaturerhöhung verstanden. Eine einfache Rechnung ergibt für diesen letzteren Ausdruck:

1) l. c.

$$\Delta v = \frac{v}{n_D - 1} [\Delta n_D - v(\Delta n_F - \Delta n_C)],$$

nach welcher Gleichung die sämmtlichen mit 100 multiplicirten Werthe der obigen Tabelle berechnet worden sind. Da Δv in allen Fällen, wenn auch sehr klein (für 1° C. im Mittel gleich 0,01 Proc.), negativ ist, so erscheinen die obigen Zahlen überall mit dem positiven Vorzeichen behaftet. Die für die einzelnen Körper vorhandenen Unterschiede in den stattfindenden Dispersionserhöhungen treten noch stärker hervor, wenn wir nicht, wie in der Tabelle geschehen, die relativen, sondern die absoluten Beträge der Dispersionssteigerungen ausrechnen, welche durch den Ausdruck $-\Delta v/v^2$ erhalten werden.

II. Theil.

Schlussfolgerungen.

In dem vorstehenden I. Theil habe ich die Ergebnisse einer auf zwölf verschiedene Glassorten und mehrere durchsichtige Mineralien ausgedehnten Experimentaluntersuchung mitgetheilt. Es soll jetzt versucht werden, eine Erklärung für die gefundenen Resultate zu geben.

Man hat bisher, wenn von den Temperaturvariationen der Brechungsindices eines Körpers die Rede war, dieselben immer durch die Veränderungen der Dichte oder des Volumens, welche der Körper durch den Einfluss der Temperatur erleidet, zu erklären gesucht. Bei der Natur der in Frage kommenden Einwirkung erscheint es aber als höchst unwahrscheinlich, dass die Volumänderung die einzige Wirkungsäusserung der Temperatur sei. Ebenso wenig wie die durch Wärme bewirkte Dilatation eines Körpers mit derjenigen Dilatation zu identificieren ist, die man erhält, wenn man den Körper mechanischen (Zug-) Kräften unterwirft, ebenso wenig dürfen wir von vornherein eine Uebereinstimmung in Bezug auf das optische Verhalten erwarten, wenn die gleiche Volumänderung durch die eine oder die andere der beiden Ursachen hervorgerufen wird. Auf einen diesbezüglichen Unterschied in dem Verhalten von Quarz hat vor Kurzem Herr Pockels¹⁾ aufmerksam gemacht. Durch

1) Pockels Ann. **37**. 305. 1889.

den Einfluss der Wärme werden die kleinsten Theilchen des Körpers nicht allein in immer grösseren Abstand von einander gebracht, sondern auch in einen lebhafteren Schwingungszustand versetzt, und es können gerade hierdurch Kräfte geweckt oder verstärkt werden, die nunmehr ihrerseits einen Einfluss auf die Lichtgeschwindigkeit ausüben. Auch spielt der Aggregatzustand dabei eine nicht unwesentliche Rolle und es ist klar, dass bei den festen Körpern, ganz besonders bei den Krystallen, wegen des complicirten Aufbaues derselben, die in Betracht kommenden Molecularkräfte recht verwickelter Natur sein können.

Unter diesen ist keine für die Brechungs- und Dispersionsverhältnisse eines Körpers von solcher Wichtigkeit wie das *Absorptionsvermögen*. Seit der Entdeckung der sogenannten anomalen Dispersion ist bekannt, welche enormen Modificationen in dem Verlauf der Brechungsindices von Farbe zu Farbe statthaben können, wenn kräftig wirkende Absorptionen vorhanden sind, und man weiss auch, dass die als farblos oder durchsichtig bezeichneten Körper durchaus nicht dieser Absorptionswirkung entbehren (vergl. den nächsten Paragraphen). Die Lage dieser Absorptionsgebiete ist jedoch dem beobachtenden Auge entrückt und nur die letzten Ausläufer dieser Absorptionswirkung ragen bis in das sichtbare Spectrum hinein. Aber auch bei diesen sogenannten farblosen Körpern tritt die innige Beziehung zwischen dem Absorptions- und Dispersionsvermögen deutlich zu Tage, wie schon daraus erhellt, dass fast alle Körper mit relativ hoher Dispersion wenig durchlässig für violette und ultraviolette Strahlen sind. Es ist sogar nicht unwahrscheinlich, dass der ganze moleculare Vorgang, dem die Dispersion ihren Ursprung verdankt, nur auf einer einfachen Absorptionswirkung kurzwelliger Strahlen beruht.

Es ist bemerkenswerth, dass in keiner der bisherigen Arbeiten über den Einfluss der Temperatur auf die Lichtbrechung fester durchsichtiger Körper auch nur die Möglichkeit einer Aenderung des Absorptionsvermögens zur Sprache gebracht worden ist. Wäre das geschehen, so würde das früher bezeichnete Verhalten des Glases schon lange den Charakter einer auffälligen und unerklärbaren Erscheinung verloren haben.

sonde
erhär
die s
der a
eine
halte
const
folge

sichti
Anna
rung
des S
ausre
ander
Inde
wied
über
nahm
wenn
Brec
Temp

Körp
dem
betr
Kör
tiven
Auc
and
erst
coef

Erk
Ers
tion
wel
auf

Unsere Behauptung, die wir im Stande sind in einigen besonders eclatanten Fällen direct durch das Experiment zu erhärten, im übrigen durch eine Reihe von Schlussfolgerungen, die sich aus unseren Beobachtungen ergeben und im Wesen der anomalen Dispersion begründet sind, ausserdem noch durch eine bisher noch nicht erkannte Gesetzmässigkeit in dem Verhalten der durchsichtigen festen Körper zu dem Satze vom constanten Brechungsvermögen zu unterstützen, ist demnach folgende:

Zur Erklärung für das Verhalten der Brechungsindices durchsichtiger fester Körper unter dem Einfluss der Temperatur ist die Annahme einer neben der Volumänderung herlaufenden Vergrösserung des Absorptionsvermögens im blauen und ultrablauen Theile des Spectrums nicht nur nothwendig, sondern auch vollständig ausreichend. Die beiden Ursachen sind in ihren Wirkungen einander entgegengesetzt, die Abnahme der Dichte vermindert den Index, die sich steigende Absorption im Blau erhöht denselben wieder; jenachdem nun die eine oder andere der beiden Wirkungen überwiegt, haben wir es mit einer Abnahme oder mit einer Zunahme des Brechungsindex zu thun (vergl. Fig. 2 p. 661); wenn die beiden Wirkungen sich gerade aufheben, bleibt der Brechungsindex anscheinend ganz befreit von dem Einfluss der Temperatur.

Bei den relativ sehr geringen Dichteänderungen der festen Körper sind von vornherein alle drei Fälle möglich und nur dem Umstand, dass die Ausdehnungskoefficienten des Glases beträchtlich kleiner sind, als die der meisten übrigen festen Körper, ist es zuzuschreiben, dass bei den Gläsern die *positiven* Temperaturvariationen der Brechungsindices überwiegen. Auch unter den Krystallen giebt es solche mit positiven und andere mit negativen Temperaturvariationen, doch treten die ersteren meist da auf, wo auch die kubischen Ausdehnungskoefficienten sehr klein sind (Kalkspath, Beryll u. A.).

Eine Sonderstellung kann somit den Gläsern nach unserer Erklärung nicht mehr zugeschrieben werden, anomal bleibt die Erscheinung, welche das Auftreten positiver Temperaturvariationen der Brechungsindices darbietet, nur in dem Sinne, in welchem man auch die Erscheinung der „anomalen Dispersion“ auffasst. Aber auch in Bezug auf die übrigen Körper er-

scheint die Erklärung von Bedeutung, weil dadurch es möglich ist, die Abweichungen in dem Verhalten dieser Körper von dem Satze der Proportionalität zwischen Brechungsvermögen und Dichte auf eine andere Weise als bisher zu deuten.

Von besonderem Interesse ist in dieser Hinsicht das Verhalten der *Metalle*. Nach den Untersuchungen von Herrn Kundt²⁾ nimmt der Brechungsindex der Metalle ebenfalls mit der Temperatur zu. Auch ist diese Zunahme (pro 1°C. 0,00370) mit Rücksicht auf den Ausdehnungscoefficienten der Metalle, der nur wenig denjenigen der Gläser überschreitet, so enorm gross, dass hier jeder etwaige Zusammenhang zwischen Dichte und Brechungsvermögen verschwindet. Vielleicht genügt schon die Annahme einer Veränderlichkeit des ausserordentlich hohen Absorptionsvermögens mit der Temperatur, um das Verhalten der Metalle in derselben Weise zu erklären, wie dasjenige der Gläser. Eine Abhängigkeit des Temperaturcoefficienten von der Farbe, also eine Aenderung der Dispersion, hat Hr. Kundt nicht feststellen können.

§ 1. Directe Versuche zum Nachweis einer Steigerung des Absorptionsvermögens des Glases mit wachsender Temperatur.

Im Anschluss an die vorliegende Untersuchung habe ich es unternommen, die hauptsächlichsten Glastypen aus dem Glastechn. Laboratorium zu Jena einer quantitativen photometrischen Prüfung zu unterziehen, wobei insbesondere auch die Veränderungen, welche das Absorptionsvermögen dieser Körper durch die Temperatur erleidet, berücksichtigt werden sollen. Doch sind diese Messungen, welche auf das sichtbare Spectrum beschränkt bleiben, und zu welchen das Glan'sche Photometer benutzt wird, noch nicht so weit vorgeschritten, um über dieselben jetzt schon Bericht erstatten zu können.

Ich werde mich deshalb hier darauf beschränken, durch einige qualitative Versuche nachzuweisen, dass in der That eine Veränderung in der Absorptionswirkung des Glases mit

1) A. Kundt, Wied. Ann. 36. p. 824. 1889.

der Temperatur stattfindet, die in einigen Fällen so auffällig zu Tage tritt, dass sie ohne Weiteres mit dem blossen Auge erkannt werden kann.

Zu dem Ende wurden Stücke der einzelnen Glassorten nebeneinander in eine Porzellanschale gelegt, und diese durch einen Bunsen'schen Brenner auf 200° , 300° und höher bis zur Schmelztemperatur des Glases, welche ungefähr bei 400° liegt, erhitzt. Machten sich schon bei gewöhnlicher (Zimmer-) Temperatur die Unterschiede in der Absorptionsfähigkeit der einzelnen Glassorten durch eine mehr oder weniger stark ausgesprochene Gelbfärbung bemerkbar, so traten diese Unterschiede bei erhöhter Temperatur immer schärfer hervor. Während das fast farblose Borosilicat-Crown O. 144 (ähnlich O. 627) wenig oder gar keine Aenderung für den blossen Anblick darbot, erschien das bei gewöhnlicher Temperatur fast vollkommen farblose Phosphatglas O. 168 (ähnlich O. 225) bei erhöhter Temperatur intensiv gelb, und bei denjenigen Gläsern, welche schon bei gewöhnlicher Temperatur eine mehr oder weniger starke Gelbfärbung besitzen, so z. B. bei dem Boratglas O. 134 und bei sämmtlichen Flintgläsern, erhöht sich diese Gelbfärbung in geradezu schlagender Weise.

Letzteres ist namentlich der Fall bei dem stark brechenden Silicatflint S. 57. Hier genügte schon die Siedehitze des Wassers, um eine deutlich wahrnehmbare Steigerung der Gelbfärbung herbeizuführen und umgekehrt nahm bei der Abkühlung — der Versuch wurde mit fester Kohlensäure, in Aether gelöst, ausgeführt —, die Färbung ab, das Glas erschien merklich blasser. Wurde dann die Erwärmung von S. 57 in der oben beschriebenen Weise auf höhere Temperaturen ausgedehnt, so nahmen die erwähnten Glasstücke allmählich die Farbe von dunklem Bernstein an, und wenn diejenige Temperatur erreicht war, wo ein Erweichen des Glases eintrat, sah das Glas dunkelroth bis braun aus. Mit dem Spectroscop in diesem Zustand untersucht, ergab sich das Resultat, dass schon bei geringer Dicke der durchstrahlten Schicht die ganze blaue Seite des Spectrums bis auf einen kleinen Theil im Roth absorhirt war. Beim Abkühlen trat wieder die ursprüngliche helle Gelbfärbung ein. Auch konnte der Versuch mit dem gleichen Erfolg beliebig oft wiederholt werden. Daraus

geht also hervor, dass der Vorgang *nicht durch chemische Veränderungen veranlasst, sondern rein physikalischer Natur ist.*

Noch eine andere Erscheinung, die sich bei diesen Erhitzungsversuchen darbot, erscheint mir erwähnenswerth, da dieselbe geeignet ist, eine Erklärung für das von F. Vogel¹⁾ beobachtete Anwachsen der Temperaturvariationen der Brechungsindices von Flintgläsern für höher gelegene Temperaturen zu geben, die Erscheinung nämlich, dass die Zunahme der Gelbfärbung des erhitzten Glases S. 57 viel schneller bei *höheren* Temperaturen erfolgt als bei niederen, mit anderen Worten, dass die Temperaturvariationen der Extinctionscoefficienten mit der Temperatur einen Zuwachs erleiden. —

Die beschriebenen Versuche stehen, wie Hr. Dr. Schott mir freundlichst mittheilte, in vollständigem Einklang mit den Erfahrungen des Glaswerks. Mehr oder weniger zeigen fast alle Gläser, wenn sie eben unter die Temperatur des Selbstleuchtens in den Schmelzhäfen erkaltet sind, eine grössere Absorptionsfähigkeit für durchfallende Strahlen, als im völlig abgekühlten Zustande. Auch bei anderen festen Körpern hat man die Erscheinung der Absorptionssteigerung mit wachsender Temperatur schon früher beobachtet, so insbesondere beim Schwefel²⁾, beim Phosphor, Zinkoxyd, Bleioxyd etc. und einer Anzahl von mineralischen Substanzen, z. B. dem Rubin-Spinell³⁾. Alle Substanzen nehmen nach dem Erkalten die ursprüngliche Farbe wieder an. Auch bei Gasen tritt in einigen Fällen eine erhebliche Steigerung des Absorptionsvermögens ein, so z. B. beim Jodgas, bei welchem bekanntlich die Erscheinung der anomalen Dispersion zuerst beobachtet wurde.

Ich hoffe die bei den Gläsern beobachtete Steigerung des Absorptionsvermögens mit der Temperatur durch die in Aussicht genommenen photometrischen Untersuchungen im einzelnen noch etwas genauer verfolgen zu können, im Uebrigen aber können die erhaltenen Resultate schon jetzt als eine

1) F. Vogel, Wied. Ann. 25. p. 87. 1885.

2) Hierüber und über die optischen Constanten des prismatischen Schwefels bei verschiedener Temperatur vgl. die Arbeit von A. Schrauf. Z. f. Krystallogr. 18. p. 113. 1890.

3) Brewster, Opt. k 1. p. 121. 1885.

directe experimentelle Bestätigung der Schlussfolgerungen der folgenden Paragraphen angesehen werden.

Bei der gegenwärtigen Untersuchung kam mit Ausnahme der Glassorte S. 40 nur optisches, von färbenden Beimengungen und Verunreinigungen möglichst befreites Glas zur Verwendung. Es war aber von grossem Interesse, den Einfluss solcher Beimengungen bei verschiedenen Temperaturen zu erforschen. Aus diesem Grunde wurde das Glas S. 40, dem 3 proc. Didymoxyd zugesetzt war, der Prüfung unterworfen (siehe oben p. 633). Das sonst farblose Glas hatte durch den Zusatz des Didymoxyds eine schwach rosa Färbung angenommen, und zeigte das charakteristische Absorptionsspectrum des letzteren. Die Erhitzungsversuche ergaben folgendes Resultat. Die rosa Färbung machte bei höherer Temperatur einer mehr grünlichen Platz, die schmalen Absorptionsstreifen im Grün verschwanden und der breite scharf markirte Streifen bei *D* erfuhr eine geringe seitliche Verschiebung nach dem rothen Theile des Spectrums.¹⁾ Für die Temperaturvariationen der Brechungsindices scheinen aber diese Veränderungen von geringerer Bedeutung zu sein, als diejenigen, welche in dem Absorptionsvermögen des Glases selbst statt haben und die als eine spezifische Eigenschaft desselben, wenigstens eines grösseren Bestandtheils anzusehen sind.

§ 2. Die Absorptionswirkung der sogenannten durchsichtigen Körper, hergeleitet aus dem Verlauf der Dispersionscurve.

Ehe wir dazu übergehen, die Veränderungen im Verlauf der Dispersionscurve mit der Temperatur zu besprechen, wollen wir versuchen, etwas genauer darzulegen, welchen Einfluss bei constanter Temperatur etwa vorhandene Absorptionen auf den Verlauf der Refractionscurve ausüben, und wie man im Stande ist, aus dem Verlauf der Refractionscurve allein sichere Schlüsse auf die Existenz von ausserhalb des sichtbaren Spectrums liegenden Absorptionsstreifen zu ziehen.

Da für die von uns untersuchten Körper nur ultraroth und ultrablau Absorptionen in Betracht kommen so haben

2) Ueber Beobachtungen dieser Art vgl. Rizzo, Atti di Torino. 16. p. 442. 1890—91. Brewster, l. c.

wir für jedes der beiden Absorptionsgebiete unsere Aufmerksamkeit nur auf denjenigen Theil der Refractionscurve zu richten, welcher von der Mitte des betreffenden Absorptionsstreifens dem sichtbaren Spectrum zugewandt ist. Die Erscheinung der „anormalen Dispersion“ macht sich also in folgender Weise bemerkbar. Die ultrarothenen Absorptionen bewirken eine Senkung der Refractionscurve, die ultrablauen eine Hebung derselben; auf der rechten Seite der unten stehenden Fig. 1 findet also eine Erhöhung, auf der linken eine Verminderung der Brechungsindices statt und zwar ist für jeden einzelnen Punkt der modificirten Refractionscurve die Abweichung von der Refractionscurve des absorptionsfreien Körpers um so grösser, je näher der Strahl dem rothen oder blauen Ende des Spectrums gelegen ist. Mit anderen Worten, unter dem Einfluss jeder einzelnen Absorption sowohl, wie auch unter dem vereinigten beider Absorptionen wird eine Dehnung des Spectrums herbeigeführt, oder was dasselbe sagt, eine *Steigerung der Dispersion*. Ueberwiegt dabei die Absorptionswirkung im Blau, so ist natürlich die Dispersionssteigerung dort auch grösser als im Roth und umgekehrt ist es bei einer überwiegenden Absorption im Roth. Die Resultate, die wir auf diese Weise aus dem Verlauf der Refractionscurve für die Existenz von entfernten und selbst weit entlegenen Absorptionsgebieten gewinnen, können somit als *ebenso zuverlässig betrachtet werden, als die auf directen photometrischen Methoden beruhenden Messungen*.

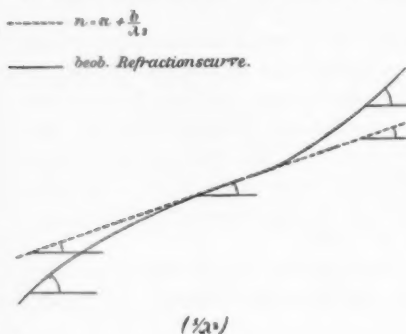


Fig. 1.

durch die Cauchy'sche Dispersionsformel $n = a + b/\lambda^2$ dar-

Nach dem Vorgange von Sellmeyer bezeichnen wir als Refractionscurve diejenige Curve, deren Abscissen die reciproken Werthe der Quadrate der Wellenlängen und deren Ordinaten die Brechungsindices bedeuten. Da diese Curve für die meisten durchsichtigen Körper sich angenähert

stellen lässt, welche Gleichung in Bezug auf die gewählten Abscissen ($1/\lambda^2$) eine gerade Linie mit constantem Neigungswinkel gegen die Abscissenaxe bedeutet (siehe Fig. 1), so kann man durch Bildung des Neigungswinkels für jeden einzelnen Spectralbezirk die Constanz desselben prüfen und damit den Verlauf der Refractionscurve von Farbe zu Farbe genau feststellen. Der Neigungswinkel selbst wird durch folgende Beziehung erhalten:

$$\tan \alpha = \frac{n_2 - n_1}{\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}} = \frac{\delta n}{\delta 1/\lambda^2},$$

in welchem Ausdruck n_2 und λ_2 auf Strahlen kürzerer, n_1 und λ_1 auf Strahlen grösserer Wellenlänge sich beziehen.

Dieses zuerst von Sellmeyer¹⁾ zur Untersuchung der Absorptionswirkung durchsichtiger Körper angewandte Verfahren wurde bei der gegenwärtigen Arbeit verwerthet. Die Resultate der Rechnung sind in den beiden folgenden Tabellen zusammengestellt. Als Einheit für die Wellenlänge gilt das Tausendstel mm. Die erstere Gruppe enthält diejenigen Körper, deren Refractionscurven nach neueren Messungen weit über die Grenzen des sichtbaren Spectrums bekannt sind, die zweite enthält die 12 von mir untersuchten Glassorten. Die zur Berechnung der Neigungstangenten benutzten Indices von Quarz, Flusspath, Steinsalz und Flintglas, letzteres nach Maassgabe seiner Brechung und Dispersion ($N_D = 1.5797$ $\gamma = 41.3$)²⁾ ein leichtes Silicatflint, wurden den Angaben von Ketteler, Theoretische Optik p. 543 u. ff. entnommen; für Kalkspath wurden die Sarasin'schen Werthe³⁾ zu Grunde gelegt. Die sämmtlichen Werthe wurden in Curven aufgetragen und diesen dann die in der Tabelle stehenden Angaben entnommen. Für die Gläser endlich wurde unter Benutzung der Productionsliste des Glastechn. Laboratoriums, in welcher die Brechungsindices auch für A angegeben sind, die Neigungstangente im Ganzen für 4 Spectralbezirke berechnet.

1) Sellmeyer, Pogg. Ann. **143**. p. 272. 1871.

2) Langley, Wiedem. Ann. **22**. p. 593. 1884.

3) Sarasin, Arch. des sc. phys. **8**. p. 392. 1882.

Die Neigungstangenten der Refractionscurven.¹⁾

λ	Steinsalz	Flintglas	Kalkspath ord. Strahl	Quarz ord. Strahl	Flusspath
5,0	10^{-4} .1820	—	—	—	—
3,5	482	—	—	—	—
2,5	160	10^{-4} .1400	—	—	—
2,0	102	488	—	10^{-4} .640	—
1,5	74	195	—	214	—
1,0	65	92	—	70	—
0,8	64	75	10^{-4} .83	50	10^{-4} .28
0,7	65	72	74	44	25
0,6	67	71	71	41	24
0,5	69	75	70,5	40	24
0,45	72	80	71	40	24
0,40	—	87	73,5	41	24
0,35	—	100	79,5	40	24,5
0,30	—	—	90	44	26
0,25	—	—	113	50	28
0,20	—	—	195	60	34
0,185	—	—	—	—	37

Dasselbe für die verschiedenen Glassorten.

Bezeichnung	A — C $\lambda = 0,712$	C — D 0,623	D — F 0,538	F — G' 0,460
S. 57	10^{-4} .229,7	10^{-4} .239,2	10^{-4} .262,6	10^{-4} .302,2
O. 165	134,1	137,9	146,1	160,8
O. 544	84,8	85,3	87,6	93,7
O. 154	69,6	68,8	69,8	73,5
O. 658	—	57,4	56,6	57,8
O. 527	60,2	59,2	59,4	61,3
O. 211	53,9	52,5	51,9	52,8
O. 1022	—	45,5	44,9	44,1
S. 205	49,1	45,3	43,5	43,3
O. 627	45,0	42,7	41,4	41,4
S. 40	47,7	44,5	43,5	43,3
O. 225	42,1	39,8	38,1	37,8

Die Tabelle gewährt einen ausserordentlich interessanten Einblick in die vorliegenden Verhältnisse. Sehen wir von den Einzelheiten ab, so tritt der gesetzmässige Verlauf der erhaltenen Werthe für die Neigungstangente überall klar zu Tage. Man sieht, dass in allen Fällen die anfängliche Abnahme der Neigungstangente vom rothem zum blauen Ende des Spectrums

1) Ueber den Verlauf von $\tan a$ im *Ultraroth* für Flusspath und einige Gläser vgl. weiter unten p. 665.

durch ein Minimum in eine Zunahme übergeht, wie namentlich die Werthe für Steinsalz, Flintglas und Kalkspath etc. zu erkennen geben. Für die von uns untersuchten Flintgläser tritt schon gleich zu Anfang eine Steigerung der Neigungstangente ein, das Minimum ist bereits überschritten. In keinem einzigen Falle aber geht die Zunahme in eine Abnahme über. Hieraus folgt, dass die sämtlichen Refractionscurven im wesentlichen den gleichen Verlauf besitzen, derselbe möge in Fig. 1 p. 648 durch die ausgezogene Linie dargestellt sein. Diese Gesetzmässigkeit, welche sich auch bei farblosen Flüssigkeiten bestätigt findet, kann nach meinen Rechnungen als ein *sehr empfindliches Prüfmittel für die Genauigkeit von spectrometrischen Messungen* benutzt werden.¹⁾

Mit Rücksicht auf den übereinstimmenden Verlauf der sämtlichen Refractionscurven lässt sich also sagen, dass bei allen durchsichtigen festen Körpern sowohl ultraroth als auch ultrablau Absorptionen vorhanden sind. Selbst für die als sehr durchlässig bekannten Körper Kalkspath, Quarz und Flusspath (für ultraviolette) und Steinsalz (für ultraroth Strahlen) weist der Gang der Neigungstangente darauf hin, dass auch hier an den äussersten bis jetzt erreichten Grenzen kräftig wirkende Absorptionsstreifen zur Geltung kommen. Ein principieller Unterschied dieser Körper untereinander und der Gläser ist nicht vorhanden.

Mit diesem Ergebniss unserer Betrachtung stimmen auch die Resultate, die man anderwärts durch directe photometrische Prüfung über die Absorptionswirkung der durchsichtigen Körper gewonnen hat, vollständig überein.²⁾ Ein besonderes Interesse bieten ferner die neuerdings von Arons und Rubens³⁾ an einigen Gläsern vorgenommenen Messungen des Brechungsindices für sehr grosse (electriche) Wellenlängen.

1) In der That ergibt sich bei denjenigen spectrometrischen Bestimmungen anderer Beobachter, die durch Ermittlung der einzelnen Brechungsindices erhalten waren, statt wie bei uns durch mikrometrische Ausmessung von *Winkeldifferenzen* (vgl. I. Theil p. 613), nicht überall die gleiche Regelmässigkeit im Verlaufe von $\tan \alpha$, wie bei den vorliegenden Messungen, obschon manchmal die Indices angeblich bis auf 6 Dezimalen genau mitgetheilt sind.

2) vgl. insbes. Eder, Handb. d. Photographie. 2. p. 284. 1890.

3) Arons und Rubens, Wied. Ann. 44. p. 206. 1891.

Es bleibt noch zu bemerken, dass für die Mehrzahl der durchsichtigen festen Körper der sichtbare Theil des Spectrums mehr unter dem Einflusse der blauen als der rothen Absorptionen zu stehen scheint, denn fast überall, ausgenommen die Phosphat- und Boratgläser, welche einen besonders nahegelegenen Absorptionsstreifen im Roth besitzen, liegt das Minimum der Neigungstangente, dessen Lage den Wendepunkt der Refractionscurve bezeichnet, auf der rothen Seite des Spectrums. Damit im Zusammenhang stehen die Resultate aller bisherigen photometrischen Untersuchungen farbloser Gläser, die Beobachtung nämlich, dass die Absorptionswirkung, welche sich auf das ganze sichtbare Spectrum erstreckt, für die stärker brechbaren Strahlen eine grössere ist, als für die schwächer brechbaren.¹⁾

§ 3. Veränderung der Neigungstangente mit der Temperatur und die Schlussfolgerungen, die sich hieraus für die Abhängigkeit der Absorptionswirkung von der Temperatur ergeben.

Wenn es nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen richtig ist, dass man die Veränderung der Neigungstangente von einem Spectralbezirk zum anderen als einen Prüfstein für das Vorhandensein von Absorptionen betrachten darf, die sich ohne besondere Hülfsmittel der Beobachtung entziehen, so wird man mit demselben Recht und derselben Sicherheit der Schlussfolgerung auch aus den Veränderungen der Neigungstangente mit der Temperatur auf Veränderungen des Absorptionsvermögens schliessen dürfen.

Unter diesem Gesichtspunkte betrachten wir eine Zu- oder Abnahme der Neigungstangente als das Kriterium des mit steigender Temperatur zu- oder abnehmenden Absorptionsvermögens. Von dem Einfluss der Dichteänderung auf die Neigungstangente können wir bei dieser Betrachtung absehen, denn die dadurch bewirkte Verringerung (vergl. § 4 weiter unten) ist im Vergleich zu der beobachteten Dispersionssteigerung, oder wie wir hier sagen, Steigerung der Neigungstangente, verschwindend klein und kann somit vernachlässigt werden.

1) Vergl. H. Krüss. Naturw. Verein Hamburg. 1890.

Daraus ergibt sich zunächst, dass die bei den durchsichtigen festen Körpern beobachtete Dispersionszunahme¹⁾ mit steigender Temperatur als die Folge des mit der Temperatur wachsenden Absorptionsvermögens dieser Körper zu betrachten ist.

Um ferner zu erkennen, von welcher Seite des Spectrums diese Steigerung der Absorption ausgeht, müssen wir die Aenderungen der Neigungstangente für die einzelnen Spectralbezirke etwas genauer betrachten. Denn es muss für den Verlauf dieser Werthe einen wesentlichen Unterschied machen, ob der Absorptionsstreifen im Blau oder der im Roth, oder beide gleichzeitig eine Steigerung erfahren.

Wir können von vornherein erwarten, dass bei den Flintgläsern, deren Absorptionsstreifen im Blau dem sichtbaren Ende des Spectrums beträchtlich näher gelegen ist, als bei den übrigen Substanzen, auch der Einfluss einer Absorptionssteigerung nicht allein entsprechend *stärker* hervortreten wird, sondern auch, dass dieser Einfluss *mehr den blauen, als den mittleren und rothen Theilen* des Spectrums zu gute kommen muss. Dagegen sind bei den übrigen Substanzen, infolge der grösseren Entfernung des Absorptionsstreifens, bei gleicher Zunahme des Absorptionsvermögens nur *kleinere* Werthe für die Zunahme der Neigungstangente zu erwarten und ausserdem muss der Einfluss für alle Theile des sichtbaren Spectrums *angenähert constant* sein.

Wir benutzen zur Berechnung der Aenderung der Neigungstangente folgenden Ausdruck, der sich aus dem obigen Ausdruck für $\tan \alpha$ in leicht ersichtlicher Weise ableitet:

$$\Delta \tan \alpha = \frac{1}{\delta \frac{1}{\lambda^2}} (\Delta \mathfrak{N}_2 - \Delta \mathfrak{N}_1)$$

und gültig ist für einen Temperaturzuwachs von 1°C .

In der nachstehenden Tabelle sind die für die drei Spectralbezirke $C - D$, $D - F$, $F - G'$ gefundenen Werthe zusammengestellt.

Durch die Tabelle wird in erster Linie bestätigt, dass für sämtliche bis jetzt untersuchten festen durchsichtigen Substanzen und für jeden Spectralbezirk des sichtbaren Systems

1) Vergl. Theil I. p. 638.

eine Zunahme der Dispersion eintritt. Wie man sieht, besitzen nämlich alle Werthe der Tabelle das positive Vorzeichen, mit Ausnahme eines einzigen (S. 205, $C - D$), von dem weiter unten noch näher die Rede sein wird.

Aenderung der Neigungstangente mit der Temperatur.

Benennung	$C - D$	$D - F$	$F - G'$
S. 57	10^{-6} .0,439	10^{-6} .0,474	10^{-6} .0,670
O. 165	0,134	0,204	0,241
O. 544	0,066	0,080	0,106
O. 154	0,064	0,054	0,068
O. 658	0,048	0,042	0,050
O. 527	0,041	0,049	0,058
O. 211	0,034	0,047	0,036
O. 1022	0,043	0,033	0,046
S. 205	- 0,014	0,031	0,028
O. 627	0,025	0,034	0,029
S. 40	0,013	0,044	0,008
O. 225	0,021	0,016	0,024
Steinsalz	0,018	0,067	0,060
Sylvin	0,068	0,028	0,045
Quarz <i>o</i>	0,020	0,029	0,020
<i>e</i>	0,012	0,029	0,020
Flusspath	0,025	0,026	0,026
Kalkspath <i>o</i>	0,018	0,007	0,008
<i>e</i>	0,014	0,039	0,016

Man sieht aber auch, dass die Zahlen der Tabelle unseren eben ausgesprochenen Erwartungen vollständig entsprechen. In der That sind bei den zuerst stehenden Flintgläsern (S. 57, O. 165, O. 544 und O. 527) die für die drei Spectralbezirke gefundenen Werthe $\Delta \tan \alpha$ nicht allein viel *grösser* als die Werthe für die anderen Körper, sondern sie zeigen auch eine nicht unbeträchtliche Zunahme nach der stärker brechenden Seite des Spectrums.

Bei den übrigen Substanzen ist dagegen von einem regelmässigen Verlauf der bezüglichen Werthe $\Delta \tan \alpha$ nichts zu bemerken. In diesen Fällen sind die drei nebeneinander stehenden Werthen jedesmal als angenähert constant zu betrachten. Die etwa vorhandene Gesetzmässigkeit wird hier durch die Fehler der Beobachtung verdeckt, und es hätte, um dieselbe zu erkennen, einer Untersuchung über einen weit grösseren Raum auch des unsichtbaren Spectrums bedurft. Das von uns untersuchte Gebiet aber begreift für die meisten der durch-

sichtigen Substanzen gerade denjenigen Theil der Refractions-curve, wo die Neigungstangente von Farbe zu Farbe nur sehr geringe Aenderungen erleidet und in dem auch das Minimum gelegen ist. Es wäre gewiss von Interesse, zu untersuchen, ob in dem Verlauf der Grösse $\Delta \tan \alpha$ und demjenigen der Neigungstangente mit Rücksicht auf die Lage des Minimums ein Zusammenhang besteht, welcher gestattet, Schlüsse über die Veränderung der Absorptionswirkung im Blau und Roth mit der Temperatur zu ziehen.

Auch bei den untersuchten Borat- und Phosphatgläsern (S. 205, S. 40 und O. 225) vermögen die vorstehenden Tabellenangaben keinen Aufschluss über etwaige Veränderungen der diesen Gläsern eigenthümlichen stärkeren Absorption im Roth zu geben (vgl. p. 652). Die Werthe $\Delta \tan \alpha$ sind auch hier klein im Vergleich zu denjenigen der Flintgläser und nahezu constant. Der bei dem leichten Borat-Crown S. 205 für den Spectralbezirk $C - D$ gefundene negative Werth macht allein eine Ausnahme. Wenn hier kein grösserer Beobachtungsfehler vorliegt, muss man annehmen, dass eine Verminderung der Absorptionswirkung im Roth durch die Erhöhung der Temperatur stattgefunden hat.

Dagegen ist bei den Flintgläsern das Resultat unserer Betrachtung in jeder Beziehung klar und eindeutig. Hier weist der Verlauf der Grösse $\Delta \tan \alpha$ direct darauf hin, dass die Absorptionszunahme von dem im *ultrablauen* Theile des Spectrums befindlichen Absorptionsstreifen ausgegangen ist. Innerhalb der Reihe der Flintgläser selbst herrscht die grösste Gesetzmässigkeit. In der Reihenfolge, in welcher dieselben aufgezählt sind, nimmt die Gelbfärbung dieser Gläser ab, d. h. der ultrablau Absorptionsstreifen rückt immer weiter fort vom sichtbaren Ende des Spectrums, oder was auf dasselbe hinauskommt, er wird bei gleicher Lage der Mitte des Absorptionsstreifens immer geringer an Intensität. In der gleichen Reihenfolge aber werden auch die Werthe $\Delta \tan \alpha$ immer kleiner, und auch das Ansteigen derselben nach dem blauen Ende erfolgt immer langsamer (vergl. Tabelle). Die Flintgläser leiten, wie man sieht, allmählich zu den übrigen Gläsern und den Krystallen über, die in noch weiter entlegenen Gebieten des ultrablauen Spectrums Absorptionswirkungen ausüben.

Wir fassen die Resultate unserer Ueberlegung in folgendem Satz zusammen:

Die bei den durchsichtigen festen Körpern beobachtete Dispersionssteigerung ist, wenigstens für die Mehrzahl der Flintgläser, die directe Folge einer durch den Einfluss der Temperatur gesteigerten Absorptionswirkung im Ultrablau; dieser gegenüber kommen etwaige Veränderungen des Absorptionsvermögens im Ultraroth für den Bereich des mittleren Spectrums wenig oder gar nicht in Betracht. Bei den übrigen Körpern können wir aus den Veränderungen, welche die Neigungstangente der Refractionscurve unter dem Einfluss der Temperatur erleidet, allein keine Entscheidung darüber treffen, ob die Dispersionssteigerung von einer Zunahme des ultrarothern oder des ultrablauen Absorptionsvermögens herrührt.

Erst die im folgenden Paragraphen angestellte Betrachtung macht es wahrscheinlich, dass auch hier ebenso wie bei den Flintgläsern das letztere stattfindet. Die Betrachtung bezieht sich auf das Verhalten der untersuchten Körper zu dem bekannten Satze der Proportionalität zwischen Brechungsvermögen und Dichte. Ich habe nämlich gefunden, dass hier eine hervorstechende Eigenthümlichkeit der durchsichtigen festen Körper vorliegt, die bisher noch gar keine Beachtung gefunden hat, die mir aber, da meine Aufmerksamkeit zuerst hierauf gelenkt wurde, die gesuchte Erklärung zuerst nahe gelegt hat.

§ 4. Das Verhalten der durchsichtigen festen Körper zu dem Satze der Proportionalität zwischen Brechungsvermögen und Dichte. — Dilatometrische Messungen.

Man hat bekanntlich den Zusammenhang zwischen dem Brechungsvermögen und der Dichte eines Körpers bei verschiedenen Temperaturen durch folgende Ausdrücke zu realisiren gesucht:

$$\frac{n-1}{d} = \text{const.} \quad \frac{n^2-1}{d} = \text{const.} \quad \frac{n^2-1}{n^2+2} \frac{1}{d} = \text{const.}$$

Von einem gesetzmässigen Zusammenhang kann schon wegen der Verschiedenheit der dafür aufgestellten Ausdrücke keine Rede sein, wenn auch der letzte (Lorentz'sche) Ausdruck den Vorzug der am weitesten — namentlich in neueren chemischen Untersuchungen — ausgedehnten Anwendbarkeit

besitzt. Auch hat es sich als ziemlich nebensächlich herausgestellt, ob das „von der Dispersion befreite“ Glied (a) der Cauchy'schen Dispersionsformel oder irgend ein dem sichtbaren Spectrum entnommener Brechungsindex der Rechnung zu Grunde gelegt wird. Die Formeln sind *Näherungsformeln*, eine vollständige Uebereinstimmung mit der Erfahrung ist weder bei den Gasen noch bei den Flüssigkeiten, noch bei den festen Körpern vorhanden.

Was die letzteren anbetrifft, so sind nach meinen Rechnungen, obschon die Aenderungen der Dichte und daher auch die Aenderungen der Brechungsindices im Vergleich zu den bei den Flüssigkeiten stattfindenden Veränderungen sehr klein sind, doch die Abweichungen, welche zwischen den beobachteten Aenderungen der Indices und den mit Hülfe der obigen Formeln aus den Ausdehnungscoefficienten abgeleiteten Werthen bestehen, in Bezug auf die Veränderungen selbst, in allen Fällen sehr gross, ja meist ebenso gross und oft grösser als diese. Es kann deshalb für die festen Körper eine Wiedergabe der beobachteten Aenderungen durch eine der obigen Formeln auch nicht angenähert erzielt werden¹⁾. Man vergleiche auch die im § 2 des I. Theiles gegebenen Erörterungen.

Dennoch bleibt, wie wir gleich zeigen werden, die angenäherte Gültigkeit der obigen Formeln auch für die festen Körper bestehen, nur erscheint hier der Einfluss der Dichte stark verdeckt durch den Einfluss des geänderten Absorptionsvermögens.

Ich möchte zunächst durch die folgende kleine Zusammenstellung, in welcher einige durchsichtige feste Körper nach der Grösse ihres cubischen Ausdehnungscoefficienten geordnet sind, zeigen, dass in der gleichen Reihenfolge die Aenderungen der Brechungsindices stattfinden. Dieselben sind zuerst positiv und wachsen dann nach der negativen Seite immer mehr an. Auch innerhalb der Gruppe der Körper Quarz, Flussspath,

1) Es ist dieser Umstand von besonderer practischer Bedeutung, wenn es sich darum handelt, die Veränderungen der Brennweite eines Fernrohrobjectivs zu bestimmen, welche durch die Veränderungen der Brechungsindices des Glases hervorgerufen werden. Bisher hat man vielfach die aus den obigen Formeln sich ergebenden Werthe hierzu verworthen und ist deshalb oft zu abweichenden Resultaten gelangt.

Sylvin und Steinsalz ist diese Uebereinstimmung in der Reihenfolge vorhanden, und man kann somit, wenn man sich auf die obigen Körper mit negativen Werthen $\Delta \mathfrak{N}$ beschränkt, sagen, dass diejenigen Körper, welche die relativ grösste Dichteänderung aufweisen, auch die stärkste Abnahme des Brechungsindex besitzen¹⁾.

Substanz	cub. Ausdehnungs- coefficient	$\Delta \mathfrak{N}_D$ in Einh. der 5. Dec.
Kalkspath ²⁾	$10^{-8} \cdot 1447$	<i>o. w.</i> 0,08 <i>e.</i> 1,02
Glas	1500—3000	2,0 bis — 0,3
Quarz	3530	<i>o.</i> — 0,63 <i>e.</i> — 0,74
Flusspath	5730	— 1,2
Sylvin	11400	— 3,6
Steinsalz	12100	— 3,7

Aus meinen Rechnungen hat sich aber noch eine andere für unsere Darstellung des Sachverhaltes viel wichtigere Gesetzmässigkeit ergeben: *Es zeigt sich nämlich, dass der Sinn der Abweichungen bei sämmtlichen durchsichtigen festen Körpern der gleiche ist, mag man es mit grösseren oder kleineren Ausdehnungscoefficienten, mit positiven oder negativen Aenderungen*

1) Hrn. Stefan ist bei Gelegenheit einer ähnlichen Betrachtung (Wien. Ber. **63.** p. 1. 1871.) diese Regelmässigkeit durch ein Versehen leider entgangen. Der Umstand nämlich, dass er irrthümlich die linearen Ausdehnungscoefficienten von Sylvin und Steinsalz (nach Fizeau) mit den cubischen von Flusspath (nach Kopp) und Quarz zusammengestellt und verglichen hat, hat ihn zu Resultaten geführt, die von den obenstehenden ganz abweichen und die die Sache natürlich viel verwickelter erscheinen lassen, als sie in der That ist.

2) Kalkspath zeigt in Bezug auf Ausdehnung ein bemerkenswerthes Verhalten, denn in der Richtung der optischen Axe findet eine verhältnissmässig sehr starke Ausdehnung, senkrecht dazu eine etwa fünfmal geringere Zusammenziehung statt. Diese axialen Ausdehnungen sind aber für die Werthe $\Delta \mathfrak{N}$ von nebensächlicher Bedeutung, wie schon daraus hervorgeht, dass der für den ord. Strahl erhaltene Werth $\Delta \mathfrak{N}$ keine Aenderung erfährt, wenn der ord. Strahl statt senkrecht zur optischen Axe parallel zu dieser durch den Krystall hindurch geht. Ich habe dieses Resultat aus Beobachtungen von Offret (l. c.) entnommen, das gleiche Verhalten zeigt auch Beryll (nach demselben Beobachter), ein Körper, der, wenn auch in viel geringerem Maasse, in Bezug auf Ausdehnung und Zusammenziehung sich dem Kalkspath gerade entgegengesetzt verhält.

der Brechungsindices zu thun haben. *In allen Fällen, die bis jetzt untersucht sind* (auch die Beobachtungen anderer Beobachter habe ich darauf hin geprüft) *bleibt ein positiver Rest übrig, wenn man die aus der Dichteänderung berechneten Aenderungen der Brechungsindices von den beobachteten Werthen Δn subtrahirt.* Hierbei ist es im Wesentlichen gleichgültig, welchen der obigen drei Ausdrücke wir der Rechnung zu Grunde legen.

Zur Durchführung dieser Rechnung bedurfte ich der cubischen Ausdehnungscoefficienten der untersuchten Körper. Für einige derselben waren die betreffenden Werthe aus anderweitigen Messungen hinlänglich bekannt. Die übrigen Zahlen für die Gläser habe ich selbst bestimmt und zwar mit Hülfe der dilatometrischen Methode. Ich benutzte zu diesem Zwecke das im Jahre 1884 von Hrn. Professor Abbe construirte *Dilatometer*, das im Princip auf die von Fizeau angegebene Methode hinausläuft, aber doch in manchen wichtigen Punkten sich von jenem unterscheidet, vor allem eine viel bequemere und sichere Messung der Streifenverschiebung gestattet.¹⁾ Die Resultate der dilatometrischen Messungen sind in der zweitnächsten Tabelle mit aufgenommen. Die Zahlen gelten ungefähr für dieselbe Mitteltemperatur (50—60°), für welche auch die spectrometrischen Messungen ausgeführt wurden.

Unter Benutzung der so erhaltenen Werthe für die cubischen Ausdehnungscoefficienten (3α) wurde zunächst der *Dichteinfluss* berechnet. Man erhält denselben durch Anwendung der folgenden Gleichungen, die sich aus den obigen Formeln in leicht ersichtlicher Weise ableiten:

$$(I) \quad \Delta n = -(n-1) \cdot 3\alpha$$

$$(II) \quad \Delta' n = -\frac{n+1}{2n} (n-1) \cdot 3\alpha$$

$$(III) \quad \Delta'' n = -\frac{n^2+2}{3} \frac{n+1}{2n} (n-1) \cdot 3\alpha.$$

1) Eine Beschreibung des Abbe'schen *Dilatometers* und der Methode findet sich in Wied. Ann. Bd. 38. p. 453. 1889 in einer Arbeit von Weidmann, in welcher auch Versuche an einigen Gläsern mitgetheilt sind. Eine ausführliche Darlegung meiner eigenen Untersuchungen möchte ich mir für einen späteren Aufsatz vorbehalten; es sei noch bemerkt, dass auf Grund des Studiums der Wirkungsweise des mehr provisorischen Apparates in der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena nunmehr ein definitives Instrument gebaut und aufgestellt worden ist, welches demnächst ebenfalls beschrieben werden soll.

Die Art wie sich die einzelnen Ausdrücke von einander unterscheiden, ist aus der Form, in welcher dieselben geschrieben sind, leicht zu erkennen. In Gleichung (II) ist nämlich $(n+1)/2n$ stets < 1 , deshalb ist auch der absolute Betrag von $\Delta'' n < \Delta' n$. Desgleichen zeigt die Betrachtung des Productes $(n^2+2)/3 \cdot (n+1)/2n$ in (III), welches sich folgendermassen schreiben lässt $\frac{1}{3}(n^2+n+2+2/n)$, dass dieser Ausdruck immer > 1 sein muss. Folglich gibt $\Delta' n$ den kleinsten, $\Delta'' n$ den grössten Betrag für den Dichteinfluss.

Die drei Grössen sind aber nicht so sehr verschieden von einander, dass dadurch die Gültigkeit des oben Gesagten aufgehoben werden kann. Die Reste behalten für alle untersuchten Körper stets das positive Vorzeichen, unbekümmert um die Wahl des Ausdrucks für Δn . Ich habe mich darauf beschränkt, das diesbezügliche Verhalten der drei Ausdrücke untereinander nachstehend durch ein Beispiel zu erläutern.

Schwerstes Silicatl Flint. S. 57 (siehe Fig. 2).

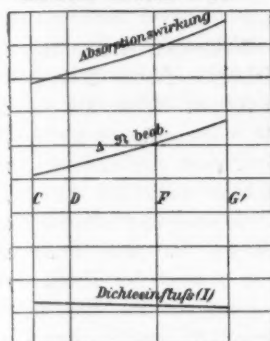
$$3a = 10^{-8} \cdot 2804.$$

Linie	\mathfrak{N}	Einfluss d. Dichte (Einheiten d. 5. Dec.)		
		$\Delta' n$	$\Delta'' n$	$\Delta''' n$
<i>C</i>	1,9492	- 2,662	- 2,013	- 3,893
<i>D</i>	1,9625	- 2,699	- 2,037	- 3,973
<i>F</i>	1,9980	- 2,799	- 2,100	- 4,194
<i>G'</i>	2,0303	- 2,889	- 2,156	- 4,400

Linie	$\Delta \mathfrak{N}$ beobachtet	Restbetrag = Absorptionswirkung nach		
		(I)	(II)	(III)
<i>C</i>	1,204	3,866	3,215	5,095
<i>D</i>	1,449	4,148	3,484	5,420
<i>F</i>	2,090	4,889	4,187	6,281
<i>G'</i>	2,810	5,699	4,964	7,208

In der folgenden Tabelle habe ich für die übrigen Substanzen der Kürze halber nur die Reste zusammengestellt, welche sich bei Benutzung von Formel (I) ergeben haben. Die Unterschiede, welche die einzelnen Körper in Bezug auf die Grösse der Reste erkennen lassen, treten bei Berechnung nach Gleichung (III) stärker hervor, schwächer nach Gleichung (II).

Schwerstes Sil. Flint. S. 57.



Flusspath.

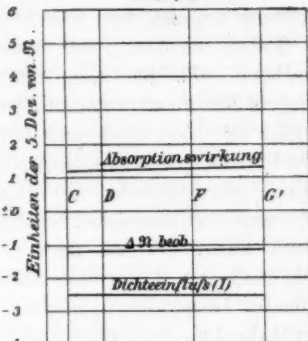


Fig. 2.

Ausdehnungskoeffizienten
und die nach Abzug des Dichteinflusses bleibenden Reste.
(Vgl. die Tabelle p. 639.)

Benennung	cub. Ausdehnungskoeff.	C	D	F	G'
		in Einheiten der 5. Decimale von 9l			
S. 57	10^{-8} 2804	3,866	4,148	4,889	5,699
O. 165	2410	2,500	2,593	2,917	3,219
O. 544	2363	1,681	1,731	1,865	2,003
O. 154	2367	1,569	1,614	1,709	1,801
O. 658	1571	1,119	1,155	1,225	1,288
O. 527	2696	1,521	1,553	1,641	1,716
O. 211	2357	1,364	1,390	1,469	1,521
O. 1022	2863	1,345	1,376	1,438	1,502
S. 205	2024	0,956	0,953	1,006	1,046
O. 627	2393	1,346	1,366	1,426	1,467
S. 40	2613	1,147	1,163	1,237	1,259
O. 225	2792	1,232	1,252	1,287	1,324
Steinsalz	12117	2,799	2,853	3,052	3,207
Sylvin	11408	1,877	1,951	2,080	2,202
Quarz o	3530	1,264	1,283	1,341	1,378
Flusspath		1,184	1,199	1,258	1,294
Kalkspath ¹⁾ o	1447	1,260	1,282	1,336	1,374
o		1,018	1,034	1,058	1,078
		1,713	1,724	1,783	1,805

Für die richtige Erkennung der Größenverhältnisse der Reste bleibt also, in Folge des hypothetischen Characters der Formeln für den Dichteinfluss, eine gewisse Unsicherheit.

1) Die Werthe für Kalkspath sind aus den Beobachtungen von F. Vogel (l. c.) abgeleitet.

Trotzdem aber ist die Gesetzmässigkeit, die sich aus der Betrachtung ergeben hat, unverkennbar.

Indem wir also jetzt, unserer bisherigen Auffassung entsprechend, die bei allen durchsichtigen festen Körpern in gleichem Sinne auftretenden Abweichungen (Reste) als die *vom Einfluss der Dichteänderung befreite Wirkungsäusserung des geänderten Absorptionsvermögens* ansehen, zeigt eine nähere Ueberlegung, dass dieselbe der Hauptsache nach nur von einer *Steigerung des Absorptionsvermögens im blau und ultrablau* herühren kann. Wollte man annehmen, im *Roth* finde eine Steigerung der Absorption statt, so müsste der Einfluss der anomalen Dispersion *in gleicher Richtung* mit dem Einfluss der Dichteabnahme verlaufen und es müssten dann, — immer die angenäherte Gültigkeit der Proportionalität von Dichte und Brechungsindex vorausgesetzt — wenigstens für die rothen und ultrarothentheile des Spectrums negative Reste auftreten. Nach unseren Ergebnissen sind aber innerhalb des sichtbaren Spectrums die beiderseitigen Wirkungen direct einander entgegengesetzt. Aehnlich liegt die Sache bei Annahme einer Verminderung der Absorptionswirkung im Blau. Auch im Roth kann keine merkliche Abnahme der Absorption stattgefunden haben; das Auftreten von positiven Resten liesse sich dadurch schon erklären, aber gleichzeitig würde sich dann auch die Dispersion vermindern, was nach unserer Untersuchung wiederum ausgeschlossen ist.

Wir sehen somit, dass die auf das Verhalten der durchsichtigen festen Körper zum „Satz vom constanten Refractionsvermögen“ gegründeten Schlussfolgerungen für sämtliche Körper genau das gleiche Resultat ergeben haben, das wir früher (§ 3) aus dem Verhalten des Neigungswinkels der Refractioncurve und (§ 1) aus directen photometrischen Versuchen für die Flintgläser erhalten hatten. Ich muss indessen hierbei erwähnen, dass die in § 3 angestellte Betrachtung über die Veränderungen von $\tan \alpha$ streng genommen erst jetzt, nachdem der Einfluss der anomalen Dispersion von dem Dichteinfluss befreit worden ist, also bei den Resten der letzten Tabelle, hätte zur Sprache gebracht werden müssen. Bei der Unsicherheit aber, mit welcher der Einfluss der Dichte auf das Brechungsvermögen bekannt ist, und bei dem sehr geringen

Einfluss, den die Dichteänderung, den obigen Gleichungen zufolge, auf die Dispersion auszuüben vermag, ist das nebensächlich. An den Ausführungen des § 3 wird dadurch im wesentlichen nichts geändert. Es würde sogar jetzt die Zunahme der Neigungstangente, wie leicht zu sehen ist, noch ein wenig stärker hervortreten, als früher angegeben wurde.

Es ist ferner ersichtlich, dass die grössere oder geringere Nähe des Absorptionsstreifens auf der blauen Seite des Spectrums sich in den Angaben der letzten Tabelle nicht allein durch ein mehr oder weniger steiles Ansteigen der Werthe nach der blauen Seite, sondern auch durch die Grösse des Restbetrages selbst zu erkennen giebt (s. auch Fig. 2). Innerhalb der Reihe der Flintgläser herrscht in der Beziehung wieder eine grosse Regelmässigkeit. Auch die übrigen Substanzen gewähren einen interessanten Vergleich.

Ob nun bei sämtlichen durchsichtigen festen Körpern eine Zunahme der Absorption im Blau bei unveränderter Lage der Mitte des Absorptionsstreifens oder ob nur ein einfaches Vorrücken des Absorptionsstreifens in der Richtung vom blauen zum rothen Ende des Spectrums stattfindet und ob in diesem letzteren Falle der Absorptionsstreifen im Roth eine Verschiebung in gleichem Sinne erleidet, muss vorläufig dahin gestellt bleiben. Im Resultat kommt es auf dasselbe hinaus, ob die Steigerung des Absorptionsvermögens, welche vom Blau ausgeht, in der einen oder der anderen Weise bewirkt wird. —

Unsere Aufgabe betrachten wir hierdurch als gelöst. Wir haben die bei den durchsichtigen festen Körpern beobachteten (positiven und negativen) Temperaturvariationen der Brechungsindices als eine Differenzwirkung zweier entgegengesetzt wirkenden Kräfte: Dichte und Absorptionsvermögen hingestellt, und glauben hierdurch für das Verhalten dieser Körper eine naturgemässe und ausreichende Erklärung gegeben zu haben.

Auch die *Veränderungen* der Temperaturvariationen der Brechungsindices mit der Temperatur, auf welche ich in der vorliegenden Untersuchung nur wenig Rücksicht genommen habe (s. p. 631, 633, 636 und 646), erklären sich auf eine ebenso ungezwungene Weise. Wenn das Absorptionsvermögen für höhere Temperaturen stärker wächst als für niedere, wie

oben für das Flintglas S. 57 angegeben ist, so wird bei unveränderlichem Ausdehnungscoefficienten der Substanz die beobachtete Temperaturvariation in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur dem Einfluss der Absorptionswirkung folgen. Aber auch die Ausdehnungscoefficienten zeigen in den untersuchten Fällen eine Zunahme derselben mit wachsender Temperatur. Diese Steigerung bedingt somit für sich allein das entgegengesetzte Verhalten von Δn . Bei dem Zusammenwirken ist es also mehr Sache des Zufalls, ob die Temperaturvariation mit der Temperatur zu oder abnimmt oder constant bleibt.

Nachträgliche Bemerkung. In einem während des Drucks dieser Arbeit erschienenen Aufsatz des Hrn. Rubens (diese Ann. Bd. 45. p. 238) sind für eine grössere Anzahl durchsichtiger Substanzen die Brechungsindices für ultraroth Strahlen mitgetheilt. Die nach einer sehr sinnreichen Methode ausgeführten Messungen sind zum Theil an Substanzen vorgenommen, die auch von mir untersucht wurden, nämlich: Steinsalz, Flussspath, Quarz und acht verschiedene Gläser aus dem Glastechnischen Laboratorium von Schott und Gen. Wir können deshalb bei denjenigen Substanzen, für welche nach den bisherigen Messungen die Neigungstangente der Refractioncurve nicht über das rothe Ende des sichtbaren Spectrums hinaus ermittelt werden konnte (Flussspath siehe oben Tabelle p. 650 und die Gläser ibid), unter Benutzung der Rubens'schen Angaben den Verlauf der Grösse $\tan \alpha$ noch ein gutes Stück in das Ultraroth hinein verfolgen.

In Anbetracht der Methode besitzen die Messungen natürlich nicht den gleichen Grad der Genauigkeit wie unsere mikrometrisch vorgenommenen Dispersionsbestimmungen, und es kommen in dem Verlauf der Neigungstangente Unregelmässigkeiten vor, die durch Beobachtungsfehler entstanden sind (vergl. die Anm. 1 p. 651). Diese Abweichungen lassen sich aber leicht graphisch ausgleichen und man kann dann der Zeichnung die bestimmten Wellenlängen zugehörigen Werthe entnehmen, wie in der folgenden Tabelle für Flussspath, ferner für das sog. schwerste Silicatifint S. 163 ($N_D = 1,8904 \nu = 22,3$), das mittlere Phosphat-Crown S. 179 ($N_D = 1.5620 \nu = 66,8$)

und
scheh

3,
2,
2,
1,
1,
0,
0,
0,
0,

stän
dies
Neig
nahr
lässi
eine
cisse
ken
unse
eine
die
viel
die
wirl
sich
Dur
Ste
Bon
des

und das Borat-Crown S. 204 ($N_D = 1,5101$ $\nu = 59,0$) geschehen ist.

λ	Flussspath	Schwerstes Silicatflint S. 163 ähnlich S. 57	Mittleres Phos- phat-Crown S. 179 ähnlich S. 40	Borat-Crown S. 204 ähnlich S. 205
3,0	10^{-4} . 865	—	—	—
2,5	362	—	—	—
2,0	175	10^{-4} . 570	10^{-4} . 800	10^{-4} . 860
1,5	82	316	200	265
1,0	38	206	62	80
0,8	28	190	50	50
0,7	25	192	47	39
0,6	24	198	44	35
0,5	24	214	43	33

Das Resultat der vorstehenden Tabelle entspricht vollständig unseren früheren Ausführungen. Man sieht, dass bei diesen Substanzen nicht allein ein sehr starkes Anwachsen der Neigungstangente jenseits des Roth stattfindet, auch die Zunahme selbst vollzieht sich je nach dem Grade der Durchlässigkeit für ultraroth Strahlen in verschiedener Weise, wie eine graphische Darstellung der sämmtlichen Werthe (als Abscissen λ , als Ordinate $\tan \alpha$) besonders anschaulich zu erkennen giebt. Die neuen Zahlen bestätigen insbesondere unsere frühere Angabe, dass die Phosphat- und Boratgläser eine viel stärkere Absorptionswirkung im Roth ausüben als die übrigen Gläser. Sie zeigen ferner, dass Flussspath zwar viel durchlässiger für ultraroth Strahlen ist als Quarz und die Gläser, aber doch eine bedeutend grössere Absorptionswirkung ausübt als Steinsalz. Die Reihenfolge, in welcher sich demnach die verschiedenen Körper nach dem Grade ihrer Durchlässigkeit für ultraroth Strahlen anordnen, ist folgende: Steinsalz, Flussspath, Flintglas, Quarz, Phosphat-Crown und Borat-Crown. Hiermit stimmen auch die Absorptionsmessungen des Hrn. Rubens (l. c. p. 258) im Wesentlichen überein.

Jena, Laboratorium der optischen Werkstätte von
Carl Zeiss, Febr. 1892.

II. Ueber den Einfluss des Druckes auf die Viscosität von Flüssigkeiten; von R. Cohen.

(Hierzu Tafel VIII Fig. 3—8.)

Versuche von Röntgen¹⁾ und Warburg und Sachs²⁾ haben übereinstimmend zu dem bemerkenswerthen Resultate geführt, dass die Viscosität des Wassers durch Compression verringert wird, während dieselbe für Aether, Benzol und vermuthlich die meisten anderen Flüssigkeiten zunimmt mit wachsendem Druck. Die angeführten Versuche sind bei Temperaturen zwischen 12° und 40° und bis zu Drucken von 150 Atm. angestellt. Im Folgenden theile ich die Resultate von Versuchen mit über die Abhängigkeit der Viscosität vom Druck im Intervall von 1—600 Atm. bei Temperaturen von 1°, 15° und 23° für Wasser, NaCl-Lösungen von vier verschiedenen Concentrationen und Terpentinöl.

Zur Druckerzeugung diente die von Caillietet zur Verflüssigung der Gase construirte Compressionspumpe; der zur Verfügung stehende Hohlraum des eisernen Compressionscylinders hatte eine Höhe von ca. 62 cm und eine Weite von 3,5 cm. Die Viscosität wurde nach der Methode der Strömung durch Capillaren bestimmt, d. h. es wurde die Zeit gemessen, die ein gegebenes Volumen Flüssigkeit zum Ausfließen aus einer gegebenen Capillare braucht. Der von F. Müller in Bonn aus Glas gefertigte Apparat hatte nach einem Vorschlag von Hrn. Professor Röntgen die in Fig. 3 dargestellte Form und die folgenden ungefähren Dimensionen: äusserer Durchmesser 2 cm, Gesamtlänge 42,5 cm, Länge der Capillare 20 cm, Radius der Capillare 0,012 cm. Es wurden verschiedene Apparate benutzt, die sich in den Dimensionen kaum voneinander unterschieden. Das Volumen Flüssigkeit, dessen Ausflusszeit gemessen wurde, war durch die Enden der bei *a* und *a'* eingeschmolzenen, rechtwinklig gebogenen Platindrähte begrenzt, die bis in die Mitte der beiden Einschnürungen des

1) Röntgen, Wied. Ann. 22. p. 510. 1884.

2) Warburg u. Sachs, Wied. Ann. 22. p. 518. 1884.

Apparates reichten. Der ganze Apparat war festgebunden an eine vernickelte Stange, die um eine horizontale Axe drehbar an das Verschlussstück des Compressionscylinders verschraubt war. War der Apparat mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, die bei d durch etwas destillirtes Quecksilber abgeschlossen wurde, so wurde er ganz in destillirtes Quecksilber, welches den Compressionscylinder anfüllte, untergetaucht; dann strömte die Flüssigkeit, nachdem das eindringende Quecksilber bei a' angekommen war, bis zu dem Zeitmoment, wo es bei a anlangte, aus unter dem mittleren Ueberdruck einer Quecksilbersäule von $(d' + d)/2$ Höhe gegen eine Wassersäule von der gleichen Höhe, wenn wir mit d und d' die Abstände der Punkte a und a' von dem oberen Ende der Capillare bezeichnen.

Die beiden Zeitmomente, in denen das Quecksilber a und a' erreichte, wurden dadurch bemerkbar gemacht, dass das Quecksilber mit dem betreffenden Platindraht einen electrischen Contact herstellte. Dazu war an die Platindrähte je ein Kupferdraht angelöthet, der isolirt durch das Quecksilber und das Verschlussstück geführt war. An der Stelle, wo die Drähte durch das Verschlussstück gingen, waren sie conisch gefeilt und mit Marineleim überzogen, dann in innen und aussen conisch verlaufende und ebenso mit Marineleim überzogene 0,5 cm dicke Hartgummistücke eingelassen, welche zur Isolirung von dem messingenen Verschlussstück dienten. Letzteres, das durch die oben erwähnte vernickelte Stange, sowie durch die Verschraubung mit dem Compressionscylinder in Verbindung mit dem den Apparat umgebenden Quecksilber stand, diente als Stromzuführung. Die erwähnte Art Drähte aus dem Innern isolirt ins Freie zu führen, erwies sich als vorzüglich und erlaubte Drucke bis zu 600 Atm. anzuwenden, ohne dass Undichtigkeiten zu bemerken gewesen wären. Erst nach hundert von Versuchen, in denen zeitweilig Drucke bis zu 900 Atm. angewandt wurden und die Temperatur um mehr als 20° geändert worden war, zeigte das Verschlussstück von den Durchbohrungen ausgehende, strahlenförmig verlaufende Sprünge und musste durch ein neues ersetzt werden. In den ersten Versuchen mit Wasser bis zur Versuchsnummer 219 befand sich im Stromkreis von drei Daniell'schen Elementen

ausser dem, wie leicht verständlich, eingeschalteten Apparat ein gewöhnliches electricisches Läutewerk, das mit Herstellung des Contactes zu functioniren begann; und zwar wurde das Quecksilber, um seine Oberfläche möglichst sauber zu erhalten, mit dem Zinkpol verbunden. Da bei der Untersuchung von Salzlösungen diese Beobachtungsmethode nicht anwendbar war (es wäre Zersetzung eingetreten), so wurde sie durch die folgende ersetzt. Die secundäre Spirale eines kleinen Inductoriums, wie es zu medicinischen Zwecken verwandt wird, das durch drei Daniell erregt wurde, war durch ein Böttcher'sches Telephon von 145,5 Ohm Widerstand mit Schallbecher geschlossen und der Apparat als Nebenschluss zum Telephon geschaltet. Der auch bei den bestleitenden Salzlösungen kräftige Ton des Telephons setzte momentan aus, wenn das Quecksilber den betreffenden Platindraht im Apparat erreichte. Dabei hat die Methode den Vortheil, dass nur ein Theil des Stromes bis zur Herstellung des Contactes, von wo ab der Strom natürlich unterbrochen wurde, durch den Apparat geht und so die Flüssigkeit erwärmen kann. Bei den Versuchen mit Wasser nach Nr. 219 wurde dieselbe Beobachtungsmethode angewandt.

Die Druckmessung geschah an dem zur Compressionspumpe gehörigen, in 20 Atm. getheilten Bourdon'schen Manometer.

Der ganze Compressionscylinder stand in einem Fass von 38 cm Radius und 90 cm Höhe, das mit Wasser gefüllt war. Die Temperatur wurde an einem in $\frac{1}{10}$ Grade getheilten Thermometer, das in unmittelbarer Nähe des Compressionscylinders hing, vor und nach jedem Versuche nach kräftigem Umrühren abgelesen. Zu den Versuchen in der Nähe von 0° wurde das Wasser zwischen den einzelnen Versuchen durch Eis abgekühlt, da die Jahreszeit die Anwendung einer grösseren Menge Schnee nicht gestattete; während des Versuches selbst wurden die Eisstücke aus dem Fasse entfernt. Sowohl bei diesen Versuchen, wie bei denen bei Temperaturen in der Nähe von 25° , wurde der ganze Beobachtungsraum nahe auf der gewünschten Temperatur erhalten. Es unterschieden sich die beiden Temperaturbestimmungen zu Anfang und Ende eines Versuches bei niedriger Temperatur um höchstens $\frac{2}{10}^{\circ}$; bei den übrigen Versuchen selten um $\frac{1}{10}^{\circ}$.

Zur Zeitmessung diente ein Chronometer von Lenbach in München, das halbe Secunden schlug.

Ich wende mich zu der Besprechung der Fehlerquellen, soweit sie

I. von der Compression herrühren.

1. Es wird das Volumen zwischen a und a' kleiner.
2. Der Radius der Capillare wird verkleinert.
3. Die Dichte des Wassers und des Quecksilbers wird vergrößert und dadurch die Druckdifferenz, unter welcher das Wasser ausfließt, geändert.
4. Die Temperatur im Compressionscylinder steigt infolge der Compressionswärme.
5. Die Entfernung der beiden Platindrähte kann durch den Druck geändert werden.

II. Von der Unzuverlässigkeit des Manometers.

III. Von der Art der Zeitmessung mit Hülfe des electrischen Contactes.

ad I 1. Um die Volumenverkleinerung zu finden, dürfen wir annehmen, der Apparat bestehe massiv aus Glas. Setzen wir den Elasticitätsmodul = 6500, die Constante μ nach Cornu¹⁾ = 0,24, so ergibt sich für den Quotienten aus dem Volumen nach und vor der Compression $V'/V = 0,9985$ für einen Druck von 600 Atm. Die beobachteten Ausflusszeiten liegen für Wasser alle unter 5000 Secunden; corrigiren wir die Ausflusszeit 5000 Secunden durch Multiplication mit V'/V , so ergibt sich 4992,5; d. h. die Grösse des Fehlers liegt jedenfalls unter $-7,5$ Secunden oder ist $< 0,15$ Proc.

ad I 2. Dieselbe Rechnung ergibt für das Verhältniss der vierten Potenzen der Radien vor und nach der Compression auf 600 Atm. $r^4/r'^4 = 1,002$. Die Grösse des Fehlers für $5000'' + 10''$ oder $< 0,20$ Proc.; der Fehler hat den entgegen-Sinn wie der vorhergehende.

ad I 3. Nehmen wir für die Compressibilität des Quecksilbers den Werth $3 \cdot 10^{-6}$, für Wasser $50 \cdot 10^{-6}$, so würde bei einer Druckdifferenz von ca. 35 cm Quecksilber, wie sie bei den Versuchen statt hatte, durch die Dichteänderung die Ausflusszeit von 5000'' bei einer Compression auf 600 Atm.

1) Compt. rend. 69. p. 333.

grösser werden um $2'',5$, der Fehler ist also positiv und $< 0,05$ Proc.

ad I 4. Um ein Urtheil zu bekommen über die Zeit, in der sich eine Temperaturdifferenz zwischen dem Innern des Compressionscylindeis und dem im Fasse enthaltenen Wasser ausgleicht, wurden besondere Versuche angestellt. An die Stelle des Apparates wurde ein dickwandiges, unten geschlossenes Glasrohr gebracht, das zur Hälfte Quecksilber, zur Hälfte Wasser enthielt. In das Wasser tauchte die eine Löthstelle eines Eisen-Neusilberthermoelementes, während die andere Löthstelle da angebracht war, wo sich während der Versuche das zur Temperaturmessung dienende Thermometer befand. Nach einer Compression auf 500 Atm. blieb nach 12 Minuten eine Temperaturerhöhung von $0,05^\circ$ zurück. Die Zeit, die zwischen der Compression und dem Eintritt des ersten Contactes bei den definitiven Versuchen verstrich, während die zwischen a und d enthaltene Flüssigkeitsmenge ausfloss, betrug mindestens 15 Minuten, meistens 25 Minuten und mehr. Eine Temperaturerhöhung um $0,05^\circ$ würde bei 18° die Ausflusszeit von 5000" reduciren auf 4994", wenn wir die Formel von Grottrian für die Abhängigkeit des Reibungscoëfficienten von der Temperatur zu Grunde legen. Der Fehler wäre also $-6''$ oder $< 0,12$ Proc.

Stellen wir kurz zusammen, so ergeben die eben besprochenen Umstände Fehler von folgendem Sinn und Grösse im Maximum:

1. $-0,15$ Proc.
2. $+0,20$ „
3. $+0,05$ „
4. $-0,12$ „

Es heben sich also die betreffenden Fehler gerade auf in den betrachteten Fällen; sie wurden nicht weiter berücksichtigt.

ad I 5. Die Uebereinstimmung der mit verschiedenen Apparaten ausgeführten Versuche spricht dafür, dass keine merkliche Verbiegung der Platindrähte durch den hohen Druck stattgefunden hat.

ad II. Das Manometer wurde nicht durch besondere Versuche controlirt.

ad III. Im allgemeinen darf man annehmen, dass in dem

Augenblick, wo das eindringende Quecksilber den Platindraht berührt, auch der electriche Contact stattfindet; dafür spricht wenigstens die Uebereinstimmung der Beobachtungen untereinander und mit den von anderen Beobachtern gefundenen Werthen. Es verdient jedoch der folgende Umstand einer Erwähnung. Die Flüssigkeit tritt am oberen Ende der Capillare tropfenweise aus. Bei Vorversuchen, bei denen die Platindrähte *a* und *a'* an den engsten Stellen des Apparates selbst eingeschmolzen waren und senkrecht in denselben hineintraten, blieb fast regelmässig ein Tropfen Wasser an der Einschmelzstelle hängen, nachdem das Quecksilber schon über den Draht hinausgestiegen war, und es trat nun nur periodisch electriche Contact ein. Der Klöppel des Läutewerkes führte regelmässig etwa alle 7 Secunden einen Schlag auf die Glocke aus. Ich erkläre mir dieses Klopfen durch die Annahme, dass in dem Moment, wo sich am oberen Ende der Capillare ein Tropfen ablöst, unten das nachdringende Quecksilber die am Platindraht hängende dünne Flüssigkeitsschicht durchbricht und Contact herstellt; unmittelbar darauf, während sich oben ein neuer Tropfen bildet, legt sich auch unten der Tropfen wieder um den Draht und verhindert den Contact. Es ist daher bei den Apparaten, die zu den definitiven Versuchen gedient haben, der Draht, wie angegeben, rechtwinklig gebogen, sodass nur die Spitze desselben sich in der Mitte der engsten Stelle befindet. Von sechs in der angegebenen Weise construirten Apparaten zeigte nur einer, bei dem die Verhältnisse zufällig besonders ungünstig ausgefallen sein müssen, die erwähnte Erscheinung; er wurde daher nicht benutzt. Uebrigens mag bemerkt werden, dass aus diesem Grunde auch bei schlecht leitenden Flüssigkeiten die zweite Beobachtungsmethode (Telephon im Nebenschluss) der ersteren (Läutewerk) vorzuziehen ist, da die unvergleichlich grösseren Potentialdifferenzen bei Anwendung eines Inductoriums um so sicherer im richtigen Moment den Contact herstellen werden. Es geht aus dem Mitgetheilten jedenfalls hervor, dass bei der Anwendung von electricheis Contacten zu ähnlichen Zwecken wie dem vorliegenden Vorsicht geboten ist.

Weitaus die grösste Fehlerquelle bei allen Versuchen über Strömung durch Capillaren liegt, wie bekannt, in dem

Umstand, dass sich Staubtheilchen in der Capillare absetzen und so den Durchmesser derselben verkleinern können. Wenn auch meine Versuchsanordnung in dieser Beziehung vorthellhaft genannt werden kann, so musste doch eine Reihe von Versuchen, die viel zu grosse Zahlen für die Ausflusszeiten lieferten, aus diesem Grunde verworfen werden.

Zur Controle, dass die Methode bei 1 Atm. Druck mit den älteren Beobachtungen übereinstimmende Resultate liefert, mögen folgende Angaben dienen. Aus den Dimensionen eines Apparates, die durch Ausmessen mit Quecksilber bestimmt wurden, und der Druckdifferenz ergab sich berechnet für $15,25^\circ$ der Reibungscoefficient des Wassers 0,00001182, nach Poiseuille ist er 0,00001164, nach Grotrian¹⁾ 0,00001158. Da die Berechnung des Reibungscoefficienten aus den Dimensionen des Apparats nur eine ungenaue sein kann, so erachte ich die Uebereinstimmung der absoluten Coefficienten als genügend.

Eine bessere Uebereinstimmung mit den von anderen Beobachtern erhaltenen Resultaten darf in der Abhängigkeit der Viscosität von der Temperatur für Wasser bei 1 Atm. Druck erwartet werden.

Es fanden für das Verhältniss der Viscosität des Wassers bei 10° zu der bei 20° : Poiseuille²⁾ 1,296, Graham³⁾ 1,315 und 1,302, Rellstab⁴⁾ 1,324, Sprung⁵⁾ 1,301.

Aus meinen Beobachtungen ergibt sich der Werth 1,307.

Berechnet man ferner z. B. aus der von mir für 15° bestimmten Ausflusszeit nach der Grotrian'schen Formel⁶⁾ die Ausflusszeit für 23° , so ergibt sich 2601,8'', gefunden wurde 2604''.

Die von Sprung⁷⁾ für Na Cl-Lösungen erhaltenen Curven, welche die Abhängigkeit der Viscosität vom Procentgehalt darstellen, dürften nicht genau genug festgelegt sein, um durch

1) Grotrian, Pogg. Ann. 160. p. 238. 1877.

2) Poiseuille, Compt. rend. 15. p. 1167.

3) Graham, Phil. Mag. (4) 24.

4) Rellstab, Transpir. homol. Flüssigk. Dias., Bonn 1868.

5) Sprung, Pogg. Ann. 159. p. 1. 1876.

6) Grotrian, Pogg. Ann. 160. p. 238. 1877.

7) Sprung, Pogg. Ann. 159. p. 13. 1876.

Extrapolation mit meinen Beobachtungen streng vergleichbare Werthe zu erhalten. Angenähert erhalte ich aus den Sprung'schen Curven für 10^0 für das Verhältniss der Ausflusszeit einer 25,7 procent. und einer 8 procent. NaCl-Lösung den Werth 1,69, während meine Beobachtungen den Werth 1,77 ergeben würden.

Ich gehe über zu der Mittheilung der Resultate, zunächst der für Wasser.

Das benutzte Wasser war destillirt und nicht von Luft befreit. Das letztere erwähne ich besonders, weil Warburg und Sachs aus einigen Versuchen geschlossen haben, dass lufthaltiges Wasser durch eine einmalige Compression eine dauernde Aenderung seiner Viscosität erfährt, während luftfreies Wasser dieses Verhalten nicht zeigt. Ich habe einige Versuche angestellt, in denen das Wasser sofort nach dem Einsetzen des Apparates 10 Min. auf 600 Atm. comprimirt wurde; es wurde dann der Druck nachgelassen und nun die Ausflusszeit bei 1 Atm. beobachtet. In den Grenzen der Versuchsfehler ergab sich dieselbe Ausflusszeit, wie ohne vorherige Compression. Da es ohne eine wesentliche Complication des Apparates nicht thunlich war, das Wasser im Apparat auszukochen und ich die erwähnte Erscheinung selbst nicht habe constatiren können, so habe ich lufthaltiges Wasser verwenden zu dürfen geglaubt.

In den im Folgenden mitgetheilten Tabellen ist in der ersten Columne die Nummer des Versuchs angegeben, τ bedeutet die Temperatur in Celsiusgraden, p den Druck in Atmosphären, t die beobachtete Ausflusszeit. Nach den Beobachtungen wurde in grossem Maassstabe für 1 Atm. 300 Atm. und 600 Atm. die Abhängigkeit der Ausflusszeit von der Temperatur graphisch dargestellt, und aus den so erhaltenen Curven durch Abstecken und Interpoliren für die zwischenliegenden Drucke die Ausflusszeiten auf Temperaturen τ' reducirt. Die so erhaltenen Werthe sind unter t' aufgeführt; die Columne T' enthält die Mittelwerthe der t' und die letzte Columne die procentischen Aenderungen der Ausflusszeit: $[(T'_1 - T'_p)/T'_1] 100$, wenn wir den Druck durch den Index bezeichnen.

Tabelle I.

Wasser. Apparat I. $r' = 15^\circ$.

Nr.	τ	p	t	t'	T'	$\frac{T_1 - T_p}{T_1} 100$
114	15,4	1	2804	2842	2836,25	0,71
115	15,4	1	2800	2838		
116	15,4	1	2800	2838		
117	15,4	1	2800	2838		
119	15,4	1	2797,5	2835,5		
120	15,4	1	2800	2838		
121	15,4	1	2797,5	2835,5		
122	15,4	1	2792,5	2830,5		
123	15,4	1	2795	2833		
122	15,4	1	2796	2834		
124	15,4	100	2780	2817,5	2816,0	0,71
125	15,4	100	2775,5	2813		
126	15,4	100	2778	2815,5		
127	15,4	100	2778,5	2816		
128	15,4	100	2777,5	2815		
151	15,4	100	2781,5	2819		
109	15,4	200	2760	2797		
110	15,4	200	2772	2809		
111	15,4	200	2756	2793		
112	15,4	200	2759	2796		
113	15,35	200	2772	2809	2800,58	1,26
150	15,4	200	2762,5	2799,5		
129	15,4	300	2752,5	2788,5		
130	15,4	300	2756,5	2792,5		
131	15,4	300	2755,5	2791,5		
132	15,4	300	2764,5	2800,5		
133	15,4	300	2767,5	2803,5		
149	15,4	300	2754	2790		
104	15,4	400	2736	2771,5		
105	15,4	400	2745	2780,5		
106	15,4	400	2737	2772,5	2775,5	2,14
107	15,4	400	2734	2769,5		
108	15,4	400	2741	2776,5		
153	15,4	400	2747	2782,5		
134	15,4	500	2739	2774		
135	15,45	500	2736	2775,5		
136	15,50	500	2739,5	2783,5		
137	15,45	500	2743	2782,5		
138	15,45	500	2745	2784,5		
152	15,4	500	2736	2771		
163	15,4	700	2733	2767,5	2772,5	2,24
164	15,4	700	2743	2777,5		
165	15,5	900	2722	2765	2761,75	2,63
166	15,45	900	2720	2758,5		

Apparat II.

Nr.	τ	p	t	t'	T'	$\frac{T_1 - T_p}{T'} 100$
175	14	1	2702	2607	2600,62	
176	13,9	1	2704	2599,5		
182	13,9	1	2701,5	2597		
189	14	1	2694	2599		
178	13,9	100	2680,5	2577,5	2587,5	0,51
186	14	100	2681	2587,5		
191	14,05	100	2686,5	2597,5	2568,25	1,25
180	13,9	200	2669,0	2558		
188	13,95	200	2665	2568,5	2559,5	1,60
181	13,9	300	2658,5	2559		
184	13,9	300	2654,5	2555	2544,17	2,17
193	14,05	300	2650,5	2564,5		
179	13,9	400	2634	2536	2535,5	2,50
187	13,9	400	2636,5	2538,5		
196	14,25	400	2625	2558	2538,5	2,40
177	13,9	500	2631	2534,5		
185	13,95	500	2619,5	2527,5	2544,5	
195	14,20	500	2614,5	2544,5		
183	13,9	700	2631,5	2537	2540	
190	14	700	2626	2540		

Apparat III.

Die mit einem * bezeichneten Versuche sind im Mittelwerth nicht berücksichtigt.

Nr.	τ	p	t	t'	t''	T'	$\frac{T_1 - T_p}{T'} 100$
306	0,60	1	4924,5	1°	4869,0	4814,33	
305	0,70	1	4890,5	1°	4849		
301	1,20	1	4818	1°	4846		
311	1,80	1	4671	1°	4782		
292	1,50	1	4713,5	1°	4783	4770,5	
286	2,05	1	4648,5	1°	4794,5		
290	2,3	1	4590	1°	4770,5		
283	5,65	1	4174	1°	4820,5		
285	5,70	1	4161	1°	4814,5	3147,40	
197	14,35	1	3205	15°	3143		
200	14,4	1	3208	15°	3151		
201	14,4	1	3203	15°	3146		
208	14,4	1	3208	15°	3151	2603,12	
202	14,45	1	3203	15°	3146		
258	23,25	1	2588	23°	2603,5		
253	22,95	1	2604	23°	2601		
266	23,30	1	2579	23°	2597,5	2610,5	
261	23,25	1	2595	23°	2610,5		

Nr.	τ	p	t	τ'	t'	T	$\frac{T_1 - T_p}{T_1} 100$
297	0,8	100	4742	1°	4715	4713	2,10
298	1,0	100	4740	1°	4740		
313	2,3	100	4508,5	1°	4684		
214	14,4	100	3184,5	15°	3128	3132,5	0,47
215	14,4	100	3190	15°	3134		
216	14,4	100	3191	15°	3135		
256	23,25	100	2578	23°	2593,5	2591	0,465
264	23,30	100	2572,5	23°	2591		
265	23,30	100	2570	23°	2588,5		
307	0,3	300	4695,5	1°	4617,5	4630,4	3,82
309	0,5	300	4684	1°	4621		
303	0,6	300	4707	1°	4659,5		
299	1,10	300	4616,5	1°	4629	4630,4	3,82
300	1,2	300	4609,5	1°	4634,5		
293	1,5	300	4636,5*	1°	4699,5*		
295	1,65	300	4643,5*	1°	4725,5*	4630,4	3,82
296	1,75	300	4601*	1°	4695,5*		
312	1,9	300	4507,5	1°	4621		
209	14,4	300	3161	15°	3106,5	3100,3	1,49
210	14,4	300	3153,5	15°	3099		
211	14,4	300	3152,5	15°	3098		
212	14,4	300	3149	15°	3094,5	3100,3	1,49
213	14,4	300	3158	15°	3103,5		
255	23,25	300	2567,5	23°	2583		
259	23,3	300	2569,5	23°	2588	2583,33	0,76
263	23,25	300	2563,5	23°	2579		
308	0,45	600	4575,5	1°	4510,5		
302	0,55	600	4594,5	1°	4541	4512,0	6,28
294	1,6	600	4440,5	1°	4511,5		
288	1,95	600	4382,5	1°	4495		
289	2,15	600	4352	1°	4488,5	4512,0	6,28
282	5,55	600	3977	1°	4516		
284	5,6	600	3976,5	1°	4521,5		
198	14,35	600	3127,5	15°	3070,5	3073,83	2,33
199	14,35	600	3128,5	15°	3071,5		
203	14,45	600	3127	15°	3079,5		
254	23,15	600	2570,5	23°	2579,5	2577	1,01
257	23,25	600	2555,5	23°	2570,5		
260	23,30	600	2563	23°	2581		
204	14,50	900	3103	15°	3060,5	3060,5	2,76

Im allgemeinen ist die Uebereinstimmung eine gute zu nennen; nur bei den Beobachtungen bei tiefer Temperatur kommen Differenzen der auf 1° reducirten Werthe bis zu 2 Proc. vor, der Grund liegt in der Schwierigkeit, die Temperatur über eine Stunde lang constant zu halten. Bei den übrigen Beobachtungen sind Differenzen von 1 Proc. selten, sodass die Mittelwerthe auf 0,5 Proc. genau sein dürften.

Ich habe darauf verzichten müssen, die Curven, welche die Abhängigkeit der Ausflusszeit von der Temperatur darstellen, wieder zu geben, da ein zu grosser Maassstab erforderlich gewesen wäre. Dagegen sind in Fig. 4 die Curven gezeichnet, welche für die Temperaturen 1° , 15° und 23° die Abhängigkeit der procentischen Aenderung $[(T_1 - T_p)/T_1] 100$ (Ordinate) vom Druck (Abscisse) darstellen. Der Einfluss des Druckes zeigt sich in hohem Maasse von der Temperatur abhängig; bei 1° ist der Einfluss einer Compression auf 600 Atm. in Procenten ausgedrückt, mehr als sechsmal so gross als bei 23° .

Betrachten wir die Curven in ihrer Gesamtheit, so ist bei keiner derselben ein Minimum der Viscosität zu beobachten; bis zu 500 Atm. verursacht die Compression noch immer eine zunehmende Verminderung der Viscosität; aber die Abnahme der Viscosität wird mit zunehmendem Druck beständig kleiner, sodass z. B. bei 23° eine Druckzunahme von 1 auf 100 Atm. ungefähr dieselbe procentische Aenderung der Viscosität hervorbringt, wie die Zunahme des Druckes von 100 auf 600 Atm.

Durch die weitaus grösste Zahl von Versuchen ist die Curve für 15° festgelegt. Dass trotz der guten Uebereinstimmung der Beobachtungen untereinander bei dem Zeichnen der Curve einige Willkür bleibt, kann nicht Wunder nehmen, wenn man bedenkt, wie stark sich kleine Aenderungen in den beobachteten Werthen bei der Berechnung der procentischen Aenderungen geltend machen.

In Fig. 5 sind als Abscissen Temperaturen, als Ordinaten die aus Fig. 4 entnommenen procentischen Aenderungen der Viscosität für 600 Atm., 300 Atm. und 100 Atm. gewählt. Die drei Curven schliessen in der Nähe von 23° eng zusammen, und lassen, nach ihrem Verlauf zu urtheilen, die Möglichkeit offen, dass sie bei wesentlich höherer Temperatur die Abscissenaxe schneiden werden, d. h. dass von da ab die Viscosität des Wassers mit zunehmendem Druck zunehmen wird. Nach den Versuchen von Warburg und Sachs muss diese Temperatur dann jedenfalls über 40° liegen.

Meine Beobachtungen sind mit den Resultaten von Röntgen und Warburg und Sachs nicht direct vergleichbar, da die

Versuchstemperaturen etwas andere sind. Ein angenäherter Werth für die procentische Aenderung der Viscosität mit dem Druck lässt sich für jede Temperatur aus Fig. 5 entnehmen. Ich gebe im Folgenden eine Zusammenstellung der Werthe von $\alpha = (T_p - T_1)/T_1 \cdot 1/p$, wo p den Druck in Atm. bezeichnet, wie sie sich aus den Versuchen von Röntgen (R)¹⁾, Warburg und Sachs (W. u. S.)²⁾ und den meinigen (C) berechnen. Dazu reducirte ich die Beobachtungen von Röntgen zunächst auf gemeinsame Temperatur nach der in der Arbeit selbst benutzten Formel von Slotte³⁾, berechnete für jeden Druck, der zwischen 19 und 27 Atm. variirte, das zugehörige α und nahm aus den so für 6,5° und 11,6° gefundenen Werthen das Mittel. Bei Warburg und Sachs ist ohnehin das α , wie es sich aus Versuchen bei 50, 100 und 150 kg/qcm Druck ergibt, berechnet; es war nur durch Multiplication mit 1,03 auf Atm. umzurechnen, und aus den bei benachbarten Temperaturen angestellten Versuchsreihen das Mittel zu nehmen. Endlich erhalte ich nach meinen Versuchen aus der procentischen Aenderung der Viscosität für die betreffenden Temperaturen nach der in Fig. 5 für 100 Atm. gezeichneten Curve α durch Division mit 100 $p = 10000$.

Temperatur	$\alpha \cdot 10^6$		
	R.	W. u. S.	C.
6,5	334	—	140
11,6	154	226	90
20°—21,4°	—	144	40
30°—40°	—	90	—

Es ergibt sich also auch aus den Beobachtungen von Röntgen einer- und Warburg und Sachs andererseits eine deutliche Abnahme des Einflusses, welchen der Druck ausübt, mit steigender Temperatur. Eine Uebereinstimmung der Werthe von α dem absoluten Betrage ist kaum zu erwarten, da es nur angenähert berechnet werden konnte aus Versuchen, die untereinander, namentlich bei Warburg und Sachs, bedeutende Differenzen aufweisen.

1) l. c. p. 514.

2) Sachs, Dissert. Freiburg i. Br. 1883. p. 31.

3) Slotte, Wied. Ann. 14. p. 21.

Salzlösungen.

Nach den erhaltenen Resultaten war es offenbar von Interesse, das Verhalten von Salzlösungen bei verschiedener Concentration zu untersuchen. Da die ausströmende Flüssigkeit, ohne den Apparat wesentlich complicirter zu machen, nicht leicht aufgefangen werden konnte, so war ich in der Wahl der Substanzen, die ohne Schaden für die Compressionspumpe untersucht werden konnten, beschränkt. Die folgenden Tabellen geben die Resultate für wässrige NaCl-Lösungen von vier verschiedenen Concentrationen wieder. Davon wurden zwei bei drei verschiedenen Temperaturen untersucht. Der über den Tabellen angegebene Procentgehalt wurde bei Herstellung der Lösung aus der mit dem Pyknometer bestimmten Dichte berechnet, am Schluss der Versuche durch Eindampfen direct bestimmt. Eine Aenderung in der Concentration der Lösungen während der Dauer der Versuche war nicht zu constatiren.

Tabelle II.

NaCl-Lösung 25,7 Proc.

Nr.	τ	p	t	t'	t''	T'	$\frac{T_p - T_1}{T_1} 100$
314 _{III}	1,6	1	9330	2°	9223	9286	2,37
316 _{III}	2,7	1	9162	2°	9349		
227 _{IV}	14,40	1	6369,5	14,5°	6350		
229 _{IV}	14,5	1	6357,5	14,5°	6357,5	6357,38	
346 _{III}	14,5	1	6360	14,5°	6360		
347 _{III}	14,5	1	6362	14,5°	6362		
267 _{III}	22,5	1	5178,5	22,5°	5178,5	5174	
268 _{III}	22,5	1	5173	22,5°	5173		
274 _{III}	22,5	1	5170,5	22,5°	5170,5		
234 _{IV}	14,3	300	6544	14,5°	6504	6508	
226 _{IV}	14,35	300	6546	14,5°	6516		
228 _{IV}	14,5	300	6504	14,5°	6504		
232 _{IV}	14,5	300	6508	14,5°	6508	9676,5	
315 _{III}	2,2	600	9623	2°	9676,5		
230 _{IV}	14,5	600	6636,5	14,5°	6636,5		
231 _{IV}	14,5	600	6663,5	14,5°	6663,5	6644	
233 _{IV}	14,5	600	6632	14,5°	6632		

Nr.	τ	p	t	τ'	t'	T'	$\frac{T'_p - T'_1}{T'_1} 100$
269 _{III}	22,5	600	5407	22,5°	5407	5412	4,59
276 _{III}	22,5	600	5419	22,5°	5419		
275 _{III}	22,55	600	5403,5	22,5°	5410		

NaCl-Lösung 13,8 Proc.

238 _{IV}	13,8	1	4234	14,5°	4144,5	4160,5	
243 _{IV}	14,05	1	4217	14,5°	4159,5		
237 _{IV}	14,2	1	4212	14,5°	4173,5		
239 _{IV}	14,25	1	4196,5	14,5°	4164,5	4191,38	0,74
247 _{IV}	13,8	300	4283	14,5°	4192,5		
246 _{IV}	13,9	300	4277	14,5°	4199,5		
244 _{IV}	14,05	300	4242,5	14,5°	4184,5	4230,33	1,68
245 _{IV}	14,1	300	4241	14,5°	4189		
242 _{IV}	14,1	600	4281	14,5°	4228,5		
241 _{IV}	14,15	600	4268	14,5°	4222	4240,5	
236 _{IV}	14,2	600	4280	14,5°	4240,5		

NaCl-Lösung 8 Proc.

317 _{III}	3,85	1	4826	2°	5071,5	5077,17	
319 _{III}	4,35	1	4767	2°	5079		
321 _{III}	4,6	1	4735,5	2°	5081		
249 _{III}	13,9	1	3686,5	14,5°	3629,5	3639,5	
250 _{III}	13,9	1	3685	14,5°	3628		
344 _{III}	14,5	1	3653	14,5°	3653		
345 _{III}	14,6	1	3638	14,5°	3647,5	3029,75	
279 _{III}	22,5	1	3034	22,5°	3034		
277 _{III}	22,6	1	3018	22,5°	3025,5		
318 _{III}	4,0	600	4755	2°	4991	4991,5	- 1,69
320 _{III}	4,55	600	4691	2°	4992		
341 _{III}	14,3	600	3669	14,5°	3650		
342 _{III}	14,4	600	3671,5	14,5°	3662	3655	+ 0,42
343 _{III}	14,4	600	3662,5	14,5°	3653		
280 _{III}	22,5	600	3054	22,5°	3054		
281 _{III}	22,5	600	3043	22,5°	3043	3050,67	+ 0,69
278 _{III}	22,6	600	3048	22,5°	3055		

NaCl-Lösung 4 Proc.

346 _{III}	2,5	1	4712	2°	4780	4787	
366 _{III}	3,45	1	4597	2°	4794		
365 _{III}	3,0	600	4552,5	2°	4670,5		
368 _{III}	3,15	600	4510	2°	4645,5	4658	- 2,69

In Fig. 6 sind in derselben Weise wie in Fig. 4 für Wasser, die Curven gezeichnet, welche die Abhängigkeit der procentischen Aenderung der Viscosität vom Druck darstellen; die gestrichelten beziehen sich auf die Temperatur 2° , die ausgezogenen auf $14,5^{\circ}$; der Procentgehalt der Lösung ist bei jeder Curve angegeben; die Curven für reines Wasser sind mit 0 Proc. bezeichnet. Mit zunehmender Temperatur und zunehmendem Procentgehalt breiten sich also die Curven, indem sie sich mehr und mehr zu geraden Linien strecken, fächerförmig über die beiden, positiven Abscissen entsprechenden, Quadranten aus. Die gesättigte Lösung (25,7procent.) verhält sich dem reinen Wasser gerade entgegengesetzt (die Viscosität nimmt zu mit dem Druck und zwar nahezu dem Druck proportional), während eine verdünnte NaCl-Lösung (z. B. von 4 Proc. bei 2°) in ihrem Verhalten ganz dem reinen Wassers bei einer etwas höheren Temperatur (im gewählten Beispiel etwa bei 13°) entspricht. Wir erhalten also dieselbe Abhängigkeit der Viscosität vom Druck einmal, wenn wir Wasser bei einer bestimmten Temperatur, und zweitens, wenn wir eine NaCl-Lösung von passender Concentration bei einer etwas tieferen Temperatur betrachten. Je concentrirter die Lösung wird, desto mehr streckt sich die Curve, welche die Abhängigkeit der Aenderung der Viscosität vom Druck darstellt, bis sie bei der gesättigten Lösung nahezu geradlinig wird.

Die zweite Schlussfolgerung, die wir der Figur entnehmen, ist die folgende: Mit steigender Concentration nimmt der Einfluss der Temperatur ab. Während bei einer 8procent. Lösung eine Temperatursteigerung von 2° auf $14,5^{\circ}$ den Sinn der Aenderung der Viscosität mit dem Druck umkehrt (bei 2° vermindert der Druck die Viscosität, bei $14,5^{\circ}$ vermehrt er sie), schliessen bei der gesättigten Lösung die Curven für 2° und $14,5^{\circ}$ dicht zusammen; die Temperatur äussert nur einen sehr geringen Einfluss.

In etwas anderer Weise stellen Fig. 7 und Fig. 8 das Verhalten dar. In Fig. 7 sind die procentischen Aenderungen der Viscosität für 600 Atm. als Ordinaten, die Temperaturen als Abscissen gewählt. Danach wäre z. B. für eine 8procent. Lösung bei 11° der Einfluss eines Druckes von 600 Atm. Null; bei tieferer Temperatur nimmt die Viscosität mit zu-

nehmender Dichte ab, bei Temperaturen über 11° zu. Je grösser die Concentration wird, desto mehr strecken sich die Curven. Es macht sich also das anomale Verhalten des Wassers, sowohl was die starke Abhängigkeit von der Temperatur, als auch was die besondere Art der Abhängigkeit vom Druck betrifft, am meisten geltend bei Lösungen von geringer Concentration und tiefer Temperatur.

Die Curve Fig. 8 stellt die Abhängigkeit der procentischen Aenderung der Viscosität für 600 Atm. vom Procentgehalt (Abscissen) für 2° und $22,5^{\circ}$ dar. Während bei $22,5^{\circ}$ eine Aenderung des Procentgehaltes um gleichviel auch eine immer gleiche Aenderung in der procentischen Aenderung der Viscosität bedingt, ist bei 2° eine kleine Aenderung des Procentgehaltes bei Lösungen bis zu etwa 10 Proc. von unverhältnissmässig grösserem Einfluss als bei grösserer Concentration. Mit anderen Worten: die beiden Erscheinungen, das Verhalten des Wassers und das einer gesättigten Lösung addiren sich zu einander bei Lösungen mittlerer Concentration. Des weiteren lässt sich aus der Fig. 8 entnehmen, dass es für jeden Procentgehalt zwischen 5 und 12 Proc. eine bestimmte Temperatur zwischen 2° und $22,5^{\circ}$ geben muss, bei welcher der Einfluss eines Druckes von 600 Atm. Null ist.

NaCl löst sich im Wasser unter Volumenzunahme, die Löslichkeit nimmt also zu mit wachsendem Druck. Es erschien nicht ausgeschlossen, dass ein Salz, das sich mit Volumenverminderung löst, dessen Löslichkeit also durch wachsenden Druck verringert wird, auch in bezug auf den Einfluss des Druckes auf die Viscosität sich wesentlich anders verhalten würde. Indessen zeigten einige orientirende Versuche mit einer 26procent. NH_4Cl -Lösung dem Sinne und der Grössenordnung nach ein den NaCl-Lösungen analoges Verhalten. Ich sah deshalb von einer genaueren Untersuchung ab.

Dagegen erschien es mir wünschenswerth, irgend einen anderen Körper zu untersuchen, der keine Lösung und kein Leiter der Electricität sei. Dazu wählte ich aus Gründen, die lediglich durch die Einzelheiten der Versuchsanordnung bedingt wurden, französisches Terpentinöl. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle enthalten.

Nr
32
32
32
33
35
34
35
33
33
32
33
35
33
33
35
33
35
35
grö
Lös
4,6
run
Ter
änd
bei
sell
der
nal
Te
geg
der
als
Vi
10
sch
ver
es
de
gil

Tabelle III.

Terpentinöl. Dichte 0,866 bei 18°.

Nr.	τ	p	t	t'	t''	T	$\frac{T_p - T_1}{T} 100$
325	6,65	1	5804,5	7°	5774,5	5737,5	
328	6,95	1	5770	7°	5762,5		
329	7,1	1	5664	7°	5679		
336	8,3	1	5541,5	7°	5734,5		
354	12,55	1	5200	15°	4983		
349	14,7	1	5161	15°	5134,5	5022,5	
353	15,3	1	4923,5	15°	4950		
332	7,25	100	6622,5	7°	6649,5	6623	15,4
331	7,35	100	6558,5	7°	6596,5		
326	6,75	300	8863,5	7°	8826,5	8636,5	50,5
330	7,4	300	8387	7°	8446,5		
350	14,85	300	7461,5	15°	7439	7439	48,10
333	7,65	600	11551	7°	11679,5		
334	8,15	600	11110,5	7°	11337,5	11508,5	100,6
351	14,95	600	9928	15°	9918	9918	97,5

Der Einfluss der Compression ist hier unvergleichlich grösser; während sich die Viscosität der gesättigten NaCl-Lösung bei einer Compression auf 600 Atm. um höchstens 4,6 Proc. ändert, haben wir es beim Terpentinöl mit Aenderungen bis über 100 Proc. zu thun. Dass nicht etwa das Terpentinöl durch den hohen Druck dauernd chemisch verändert wurde, bewiesen Versuche, in denen die Ausflusszeit bei 1 Atm. nach vorheriger Compression bestimmt und derselbe Werth wie ohne Compression erhalten wurde. Wie bei der gesättigten NaCl-Lösung ist die Aenderung der Viscosität nahezu dem angewandten Druck proportional; der Einfluss der Temperatur ist auch hier gering, aber er macht sich in entgegengesetztem Sinne geltend. Während bei der NaCl-Lösung der Einfluss des Druckes bei tiefer Temperatur geringer war als bei höherer, ist es hier umgekehrt; die Aenderung der Viscosität für 600 Atm. beträgt bei 15° 97,5 Proc., bei 7° 100,6 Proc. Nach den Versuchen von Warburg und Sachs scheint sich Aether in dieser Beziehung wie Terpentinöl zu verhalten, Benzol dagegen wie die NaCl-Lösung. Wir haben es hier also nicht etwa mit einer charakteristischen Eigenschaft der einfachen Flüssigkeiten im Gegensatz zu Lösungen zu thun.

Fassen wir die erhaltenen Resultate zusammen, so ergibt sich:

1. Wie schon Röntgen und Warburg und Sachs fanden, wird die Viscosität des Wassers bis zu Temperaturen von 40° durch Druck vermindert.

2. Bis zu 900 Atm. und Temperaturen von 25° ist ein Minimum der Viscosität nicht zu beobachten, die Aenderung der Viscosität ist aber nicht dem Druck proportional, sondern wächst langsamer.

3. Der Einfluss des Druckes auf die Viscosität ist beim Wasser stark veränderlich mit der Temperatur und ist im Temperaturintervall $0-23^{\circ}$ in der Nähe von 0° am grössten. Ob bei Temperaturen über 40° die Viscosität des Wassers durch Druck wächst, ist nicht entschieden.

4. Bei concentrirten wässerigen NaCl- und NH_4Cl -Lösungen nimmt die Viscosität der Lösung durch Druck zu und es ist die procentische Aenderung nahe dem Druck proportional. Der Einfluss der Temperatur ist gering.

5. Je verdünnter eine NaCl-Lösung ist, desto mehr macht sich das anomale Verhalten des Wassers geltend, sowohl was den Einfluss der Temperatur, als auch den Einfluss weiterer Drucksteigerung betrifft. Von einer 5procent. Lösung an aufwärts bis zu einer 10procent. gibt es für jede Concentration eine bestimmte Temperatur zwischen 2° und $22,5^{\circ}$, bei welcher der Einfluss eines Druckes von 600 Atm. auf die Viscosität Null ist (cf. Fig. 6).

6. Bei Terpentinöl ist die Aenderung der Viscosität mit dem Druck über 20 mal so gross als bei der gesättigten NaCl-Lösung und nahe dem Druck proportional. Der Sinn der Aenderung ist der gleiche. Der Einfluss der Temperatur ist gering und macht sich im entgegengesetzten Sinne geltend, wie bei einer NaCl-Lösung.

Würzburg, Physikal. Institut. Febr. 1892.

III. *Ueber den Begriff der Localisirung der Energie; von Willy Wien.*

Die umfassende Bedeutung, welche der Begriff der Energie durch das Gesetz ihrer Erhaltung gewonnen hat, macht denselben zu einer zweckmässigen Grundlage für die Darstellung der Naturvorgänge. Während in der reinen Mechanik, bei welcher man es nur mit der Verfolgung bekannter Bewegungen zu thun hat, der Werth des Energiebegriffes nicht so deutlich hervortritt, zeigt er sich unentbehrlich überall da, wo die Bewegungen, falls wir auch genügende Veranlassung haben, solche zu vermuthen, doch ihrer Art nach verborgen sind. Die analytischen Methoden, welche zur Behandlung dieser Erscheinungen ausgebildet wurden, ruhen, wie es nothwendig ist, auf den Grundlagen der Newton'schen Mechanik, unterscheiden sich von ihr aber dadurch, dass sie die Energie als grundlegend betrachten, welche durch die feststehende Eigenschaft ihrer Unzerstörbarkeit vorzugsweise geeignet ist, die Darstellung mannigfaltiger Einzelvorgänge in zusammenfassender Weise zu ermöglichen.

Bei der Ausbildung des Energiebegriffes hat man sich noch nicht veranlasst gesehen, alle Folgerungen zu ziehen, welche durch ihre Eigenschaften bedingt werden. Während man die Constanz der Materie so auffasste, dass ein materieller Theil seine Lage nur auf stetigem Wege verändern könne, ist diese Vorstellung auf die Energie nicht ausgedehnt worden. Nachdem man aber in neuester Zeit an dem Glauben an unvermittelte Fernkräfte zu rütteln begonnen hat, ist kein principiell Hinderniss vorhanden, auch der Energie nur eine stetige Ausbreitung von Ort zu Ort zuzuschreiben. Sie würde dadurch vollständig in Parallele zur Materie treten, und in der That ist bei vielen Naturvorgängen, wie bei Strahlungen und geleiteter Wärme, die Vorstellung stetiger Fortbewegung der Energie schon lange unerlässlich gewesen.

Die Frage nach der Richtung der Energiebewegung und der Geschwindigkeit ihrer Ausbreitung ist hier schon seit lange Gegenstand weitläufiger Untersuchungen. Die Gesetze für die Bewegung der Energie waren in diesen Fällen noch leicht zu übersehen und es bedurfte zu ihrer Festlegung keiner weiteren Formulierungen. Ein weitergehendes Bedürfniss solcher Vorstellungen ist neuerdings namentlich in der Electricitätslehre herangetreten. So sind die Vorgänge in einem constanten galvanischen Strome oder einem veränderlichen electromagnetischen Felde auf Grund der reinen Maxwell'schen Theorie ohne Zuhülfenahme dieser Betrachtungsweise sehr schwer anschaulich zu machen. Mit ihr kann man einen constanten galvanischen Strom als eine stationäre Bewegung der Energie auffassen, indem die Kraftlinien aus der electromotorischen Stelle austreten, durch den Aether nach der Oberfläche des Stromkreises wandern, durch sie eintreten und im Innern des Leiters in Wärme verwandelt werden. Diese Vervollständigung der Maxwell'schen Anschauungen ist von Poynting¹⁾ gegeben und durch die Experimente von H. Hertz nahegelegt worden. Von ihm ist auch darauf aufmerksam gemacht, dass der Begriff der Energiebewegung zum Zwecke der Anwendung auf diese Fragen einer genauen Analyse zu unterwerfen sei.²⁾

Ein sich periodisch veränderndes electromagnetisches Feld ist der Sitz von Energiestrahlung. Aber die Art ihrer Vertheilung ist hier schon zu verwickelt, als dass man mit den einfachen Vorstellungen, wie wir sie aus der Lichtstrahlung gewonnen haben, zu einer übersichtlichen Auffassung der That-sachen gelangen könnte.

Es erscheint deshalb wichtig, zu erforschen, in welchen Fällen der Energiebegriff die Vorstellung der Localisirung zulässt. Es liegt in der Natur der Sache, dass hierbei immer der ganze Energiewerth, also die Summe der potenziellen und kinetischen Energie genommen werden muss. Die nothwendige Unterscheidung beider Arten ist für die Anwendung des Energiebegriffes insofern ungünstig, als man, falls beide vorhanden sind, durch Kenntniss der Gesamtenergie, auch wenn diese,

1) J. H. Poynting, Phil. Transact. 1885. 2. p. 343.

2) Gött. Nachr. 19. März 1890.

wie wir immer voraussetzen, in analytisch entwickelter Form gegeben ist, von den thatsächlichen Vorgängen noch nichts bestimmtes weiss, da die Darstellung der wirklichen Bewegung noch die Kenntniss der Differenz beider Energieformen erfordert. Ist das System unvollständig, so genügt auch dies nicht in allen Fällen, sondern nur solange das Princip der kleinsten Wirkung gilt.¹⁾

Wenn man die Gesamtenergie betrachtet, so wird sich zeigen, dass man von einer stetigen Ausbreitung derselben sprechen kann in allen Fällen, wo man es mit stetigen Massen und Druckkräften zu thun hat. Sie bleibt auch noch bestehen, wenn conservative Kräfte auf stetige Massen wirken und man sich auf die Betrachtung dieser letzteren beschränkt. Dagegen hört diese Auffassung auf bei Kräften, welche auf discrete Massen wirken.

Während die electricischen und magnetischen Kräfte sich auf Druckkräfte zurückführen lassen und in den Rahmen unserer Auffassung passen, ist dies bei der Schwerkraft, sobald man das vollständige, aus discreten Massen bestehende System betrachtet, nicht mehr der Fall. Eine Zurückführung auf Druckkräfte ist hier nicht zulässig, denn gleichartige Massen üben hier anziehende Kräfte aus, und der Energievorrath, welcher bei gleichen, sich abstossenden Electricitätsmengen positiv ist, würde durch die Darstellung anziehender Kräfte das negative Vorzeichen erhalten müssen, was dem physikalischen Sinne widersprechen würde.

§ 1.

Allgemeine Grundbegriffe.

Die Bewegung der Energie ist eine Abstraction von der Bewegung der materiellen Körper. Es müssen daher zunächst immer bestimmte Angaben über die kinetischen Verhältnisse des zu betrachtenden Systems vorliegen. Wir werden die kinetische Energie mit L , die potenzielle mit F bezeichnen. Wir setzen

$$(1) \quad \frac{\partial(F+L)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

1) Vgl. v. Helmholtz, Ueb. die phys. Bedeutung des Principes der kleinsten Wirkung. Crelle Journ. 100. p. 137 ff.

und betrachten einen beliebig geschlossenen Raum innerhalb des Systems, so wird

$$\begin{aligned} & \iiint \frac{\partial}{\partial t} (F + L) dx dy dz \\ &= - \int ds \{ u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz \} \end{aligned} \quad (2)$$

wenn das Integral links über den Raum, rechts über seine Oberfläche erstreckt wird und $\cos nx$, $\cos ny$, $\cos nz$ die Richtung der Normale desselben bezeichnen, welche nach dem Innern des Raumes genommen werden muss.

Es ist leicht zu sehen, dass diese Zerlegung unsere Voraussetzung stetiger Energieausbreitung ausspricht. Denn in diesem Falle kann eine Aenderung des Energiewerthes in dem Raume nur durch seine Oberfläche hindurch eintreten; sie muss also als Oberflächenintegral sich darstellen lassen. Diese Möglichkeit ist an die Existenz der Gleichung (1) gebunden. Die Grössen u , v , w sind *gerichtete* Grössen. Wir wollen sie als die *Componenten der strömenden Energie* bezeichnen.

Aus Gleichung (1) ersieht man, dass dieselben die Dimension der Energie multiplicirt mit einer Geschwindigkeit besitzen, also in den bekannten Symbolen

$$\left[m \frac{P}{t^2} \right].$$

In sehr vielen Fällen, bei Messung der Strahlungen, der Erwärmung durch electriche Vorgänge u. s. w. ist es die strömende Energie, welche gemessen wird. Aus diesem Grunde hat sie Anspruch auf besonderes physikalisches Interesse. In manchen Fällen ist eine weitere Zerlegung der u , v , w denkbar. Wenn man nämlich sicher ist, dass der Energievorrath des Systems zuvörderst Null sein kann und von einer bestimmten Quelle her sich eine bestimmte Energiemenge durch den Raum hin verbreitet. Man kann dann nach der Geschwindigkeit dieser Ausbreitung fragen. Zu dem Zwecke müssen sich die Grössen u , v , w in Ausdrücke von der Form

$$r \frac{d\xi}{dt}, r \frac{d\eta}{dt}, r \frac{d\zeta}{dt}$$

zerlegen lassen, wo

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$$

Geschwindigkeiten sind. Dann bezeichnet r die Dichtigkeit der Energie.

In diesem Falle kann man eine Darstellungsmethode wählen, welche zunächst zwar nur secundäre Bedeutung hat, aber doch geeignet ist, die Festlegung der Begriffe zu erläutern. Wir haben

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$$

als gegebene Function von x, y, z, t zu betrachten, welche wir erhalten haben, indem wir u, v, w und

$$(3) \quad r = \frac{1}{2} h \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]$$

(wo h die Dichtigkeit der stetigen Masse bezeichnet), bildeten. Dabei muss die Gleichung gelten:

$$(4) \quad \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichung spricht die Erhaltung der Energie in der Form der Continuitätsgleichung aus.

Man kann nun die Geschwindigkeiten $d\xi/dt, d\eta/dt, d\zeta/dt$ betrachten als diejenigen, mit denen ein bestimmter Energiethail sich fortbewegt. Dann sind ξ, η, ζ die Coordinaten eines Energiethails, zur Zeit t . Man kann also die x, y, z durch die ξ, η, ζ ersetzen. Dann gewinnt man durch Integration:

$$\begin{aligned} \xi &= \Psi_1(t, c_1, c_2, c_3) \\ \eta &= \Psi_2(t, c_1, c_2, c_3) \\ \zeta &= \Psi_3(t, c_1, c_2, c_3), \end{aligned}$$

wo die c unabhängig sind von t . Nennen wir nun die Coordinaten zur Zeit t_0 a, b, c , so gewinnen wir diese Grössen als Functionen von t_0 und den c und umgekehrt die letzteren ausgedrückt durch t_0 und a, b, c ; setzen wir diese Werthe in die obigen Gleichungen, so können wir den Ort bestimmen, an welchem sich der Energiethail, zur Zeit t , befindet, der zur Zeit t_0 am Orte a, b, c war. Dabei muss die Gleichung gelten:

$$\frac{d(rD)}{dt} = 0,$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial a} & \frac{\partial \xi}{\partial b} & \frac{\partial \xi}{\partial c} \\ \frac{\partial \eta}{\partial a} & \frac{\partial \eta}{\partial b} & \frac{\partial \eta}{\partial c} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial a} & \frac{\partial \zeta}{\partial b} & \frac{\partial \zeta}{\partial c} \end{vmatrix}$$

§ 2.

Hydrodynamik.

Von den Vorgängen der reinen Mechanik sind für uns zunächst die Bewegungen der Flüssigkeiten von Interesse, weil bei ihnen die Voraussetzung stetiger Energieausbreitung ohne weiteres erfüllt ist. Die allgemeinen Gleichungen lauten bekanntlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y} + \frac{\partial (hw)}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

wenn u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit, V die Potentialfunction der äusseren Kräfte, h die Dichtigkeit und p den Druck bezeichnen. Dabei ist p eine Function von h .

Um nun die Grössen u, v, w zu bilden, multipliciren wir die erste Gleichung mit u , die zweite mit v , die dritte mit w und addiren sie. Ferner setzen wir

$$q^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

bilden das Raumintegral über einen geschlossenen Raum und integriren partiell nach x, y und z . Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \iiint h \left\{ u \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial t} \right\} dx dy dz &= \\ \int ds \left\{ u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz \right\} \left[p - hV + \frac{h}{2} q^2 \right] &+ \\ + \iiint \left\{ p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + V \frac{\partial h}{\partial t} \right. &- \\ \left. - \frac{q^2}{2} \frac{\partial h}{\partial t} \right\} dx dy dz. \end{aligned}$$

Zieht man die Raumintegrale zusammen, so werden dieselben

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} (h q^2) - \frac{\partial}{\partial t} (V h) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \\ \times dx dy dz.$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} (h q^2) \right) = \frac{\partial L}{\partial t}, \\ - \left[\frac{\partial}{\partial t} (V h) + p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Die gewonnene Umformung ist also die durch die Gleichungen (1) und (2) vorgeschriebene. Es wird daher

$$(4) \quad \begin{cases} u = -u(p - hV + \frac{1}{2} h q^2) \\ v = -v(p - hV + \frac{1}{2} h q^2) \\ w = -w(p - hV + \frac{1}{2} h q^2) \end{cases}$$

Man ersieht aus diesen Gleichungen, dass die Energie hier immer dieselbe Bewegungsrichtung hat wie die Flüssigkeit selbst. Die Componenten der strömenden Energie sind dieselben für eine elastische, wie für eine incompressible Flüssigkeit.

Man kann noch eine Umformung vornehmen, welche es gestattet, die Strömungskomponenten direct aus den als bekannt vorausgesetzten Componenten der translatorischen und rotatorischen Bewegung der Flüssigkeit zu entnehmen.

Man kann nämlich nach Clebsch¹⁾ die allgemeinen Geschwindigkeitscomponenten einer Flüssigkeit schreiben:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \chi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \chi \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \chi \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

Dann gilt für p die Gleichung:

$$\frac{p}{h} = V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ + \frac{1}{2} \chi^2 \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right\}.$$

1) Crelle, 56. p. 1.

Hieraus ergeben sich dann

$$(5) \quad \begin{cases} u = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} F_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x} F_2 \right) h \\ v = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} F_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} F_2 \right) h \\ w = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} F_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} F_2 \right) h \end{cases}$$

wo

$$\begin{aligned} F_1 = & - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \chi \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\} \\ & + \chi^2 \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ F_2 = & F_1 \chi. \end{aligned}$$

Das erste Glied der rechten Seite der Gleichungen (5) rührt von der Richtung der translatorischen, das zweite von der der rotatorischen Bewegung der Flüssigkeit her. Die Energie der ersten strömt senkrecht zu den Flächen $\varphi = \text{const.}$, die der zweiten senkrecht zu den Flächen $\Psi = \text{const.}$ Die Schnittlinien der Flächen $\Psi = \text{const.}$ und $\chi = \text{const.}$ sind die Wirbellinien.

Es ist hiernach die Strömung der Energie zu berechnen, welche namentlich in den Specialfällen von Interesse sein wird, wo mehrere Wirbelfäden scheinbar Kräfte aufeinander ausüben. Die Energie strömt dann von dem einen zum anderen, und ihre Bewegung kann als Maass für jene Kräfte angesehen werden. Wir betrachten nun zunächst incompressible Flüssigkeiten.

Wenn χ und Ψ von Null verschieden sind, also Wirbel vorhanden bleiben, verschwinden im allgemeinen die Functional-determinanten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial F_1}{\partial x} \text{ u. s. w.}$$

und

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial x} \text{ u. s. w.}$$

nicht. Sie verschwinden aber, wenn χ und Ψ gleich Null sind. Dann lassen sich die u , v , w als partielle Ableitungen einer Function darstellen. Es wird nämlich dann

$$(6) \quad \begin{cases} u = h \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ v = h \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ w = h \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{cases}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Man erhält denselben Werth von $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z$, wenn man ausgeht von der Reihe

$$(7) \quad \begin{cases} u = \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \\ v = \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \\ w = \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \end{cases}$$

wie man sich leicht durch Rechnung überzeugt bei Berücksichtigung der Gleichung $\Delta \varphi = 0$, in welche die Continuitätsgleichung bei incompressibeln Flüssigkeiten übergeht. Es können sich also die Werthe der Gleichungen (6) und (7) noch durch Integralconstanten unterscheiden.

Diese Gleichungen lassen sich auf anderem Wege verificiren, falls keine äusseren Kräfte wirken.

Man kann von diesen bei incompressibeln Flüssigkeiten absehen, weil sie von der Zeit unabhängig sein sollen, ihr Beitrag zum Werthe von $\partial(F + L)/\partial t$ bei constant bleibender Dichtigkeit Null ist. Die Energie der Flüssigkeit ist bei vorhandenem Geschwindigkeitspotential

$$F + L = \frac{h}{2} \iiint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung $\Delta \varphi = 0$ und des Green'schen Satzes kann man ohne weiteres das Integral (2) bilden. Es ist

$$\begin{aligned} & \iiint \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz. \\ &= - \int ds \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \varphi \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos nz \right] \right\} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

also nach (2)

$$u = \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \text{ u. s. w.}$$

Es lassen sich also die u , v , w als partielle Ableitungen einer Function

$$f = \frac{h}{2} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

darstellen. Aus dem Green'schen Satze folgt ferner:

$$\begin{aligned} & \iiint dx dy dz \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \right\} \\ &= - \int ds \left\{ \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n \partial t} \right\} = - \int ds \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \end{aligned}$$

also

$$\int ds \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = 2 \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

woraus dann die Gleichungen (6) sich ergeben.

Wenn φ an der Oberfläche eines einfach zusammenhängenden Raumes gegeben ist und überall endlich und stetig bleibt, so lässt sich bekanntlich die Continuitätsgleichung $\Delta \varphi = 0$ als Minimalsatz so ausdrücken, dass die Gleichung bestehen soll,

$$\delta \iiint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = 0.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} & \delta \iiint \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\ &= - \delta \int ds \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = 0, \end{aligned}$$

Bei gegebener Bewegung in der Oberfläche ist die Strömung der Energie ein Minimum bei der wirklich vor sich gehenden Bewegung der Flüssigkeit.

Betrachten wir, um ein Beispiel zu geben, die Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit. Dann ist bekanntlich ¹⁾ bezogen auf ein mit der Kugel verbundenes Coordinatensystem

$$\varphi = \frac{R^3}{2} u \frac{\partial}{\partial x} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

wenn die Kugel mit dem Radius R in der Richtung der x mit der Geschwindigkeit u sich fortbewegt.

Ist nun du/dt von demselben Vorzeichen wie u , d. h. wird die Kugel von aussen beschleunigt, so ist $\varphi(\partial\varphi/\partial t)$ jedenfalls positiv. Die Energiemenge, welche durch das Element ds der Kugeloberfläche fliesst, ist $ds \partial/\partial t (\varphi \partial\varphi/\partial n)$.

Hier ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = u \frac{x}{R},$$

also

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) = -\frac{1}{2} u \frac{\partial u}{\partial t} \frac{x^2}{R}.$$

Es ist also $\partial/\partial t (\varphi \partial\varphi/\partial n)$ jedenfalls negativ, die Energie strömt aus der Kugel in die Flüssigkeit.

Wenn sich zwei Kugeln in der Flüssigkeit bewegen, und zwar mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so üben sie scheinbar Kräfte aufeinander aus. Es müssen dann noch äussere Kräfte thätig sein, um die gleichförmige Bewegung zu unterhalten. Es findet dabei eine Bewegung der Energie von einer Kugel zur andern statt. Durch die Arbeitsleistung der äusseren Kräfte, wird im allgemeinen der Energievorrath des Systems der Zeit nach geändert. Er bleibt constant, wenn eine der Kugeln ruht, oder beide mit gleicher Geschwindigkeit in derselben Richtung sich bewegen.

Es ist die Energiemenge, welche aus der ersten Kugel in die Flüssigkeit strömt ¹⁾

1) Kirchhoff, Mechanik, 18. Vorles.

1) Kirchhoff, a. a. O. Es bedeuten: R, R' die Radien, u, v, w, u', v', w' die Geschwindigkeiten der Mittelpunkte, a, b, c, a', b', c' die Coordinaten derselben für die Kugeln, r, r' die die Abstände des Punktes x, y, z von den Mittelpunkten, alles bezogen auf ein festes Coordinatensystem.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int ds \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \\
&= -\frac{\pi}{2} R^3 R'^3 \left\{ (u^2 u' - u'^2 u) \frac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial a^3} \right. \\
&\quad + \left[(v w' + v' w) (v - v') + v v' (w - w') \right] \frac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial b^3 \partial c} \\
&\quad + \left[(v w' + v' w) (w - w') + w w' (v - v') \right] \frac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial b \partial c^2} \\
&\quad + \left[(v w' + v' w) (u - u') + (u u' + w' u) (v - v') + (u v' + u' v) (w - w') \right] \\
&\quad \quad \times \frac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial a \partial b \partial c} + (v^2 v' - v'^2 v) \frac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial b^3} \\
&\quad + \left[(u v' + u' v) (v - v') + v v' (u - u') \right] \frac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial b^2 \partial a} \\
&\quad + \left[(u v' + u' v) (u - u') + u u' (v - v') \right] \frac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial b \partial a^2} \\
&\quad + (w^2 w' - w'^2 w) \frac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial c^3} \\
&\quad + (w u' + w' u) (w - w') + w w' (u - u') \frac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2 \partial a} \\
&\quad + (w u' + w' u) (u - u') + u u' (w - w') \frac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial c \partial a^2} \Big\}
\end{aligned}$$

Die gleiche Energiemenge strömt aus der zweiten Kugel. Dieselbe verschwindet, sowohl wenn u, v, w oder u', v', w' Null sind oder auch wenn $u = u' \ v = v' \ w = w'$. In diesem Falle haben die äusseren Kräfte die Bedeutung, dass sie die Kugeln zu einem starren System verbinden. Im allgemeinen sind die gegenseitigen Einwirkungen der Kugeln nicht gleich und entgegengesetzt. Trotzdem fliesst durch beide Kugeln gleichviel Energie in die Flüssigkeit, solange die gleichförmige Bewegung unterhalten wird. Es hat nach dem vorhergehenden keine Schwierigkeit, die Strömungen der Energie überall in der Flüssigkeit zu verfolgen.

Wir gehen jetzt noch zu der Betrachtung einer incompressibeln reibenden Flüssigkeit über. Unsere Betrachtungsweise hat hier noch den besonderen Vortheil, dass sie durch Heranziehung der in Wärme umgewandelten Energiebeträge das System erst zu einem vollständigen macht. Zu den vorhandenen Bezeichnungen haben wir nur noch die Reibungsconstante k hinzuzufügen. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - k^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - k^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Wir multipliciren wieder diese Gleichungen mit u beziehentlich v , w , und addiren sie, addiren ferner die aus der Continuitätsgleichung folgende identische Gleichung:

$$= -k^2 \left(u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right)$$

Unsere Integrationen geben dann

$$\begin{aligned} \iiint dx dy dz \left(u \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial t} \right) &= \int ds \left\{ \left[(p - hV + \frac{h}{2} q^2) u \right. \right. \\ &- h k^2 \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} + v \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \cos nx + \left[(p - hV + \frac{h}{2} q^2) v \right. \\ &- h k^2 \left(2v \frac{\partial v}{\partial y} + u \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - w \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \cos ny + \left[(p - hV + \frac{h}{2} q^2) w \right. \\ &- h k^2 \left(2w \frac{\partial w}{\partial z} + u \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \cos nz \left. \right\} \\ &- h k^2 \iiint dx dy dz \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der entsprechenden früheren hauptsächlich durch das hinzugefügte Raumintegral

auf der rechten Seite. Wir erkennen die physikalische Bedeutung desselben leicht durch die Erwägung, dass den Bewegungsgleichungen die Voraussetzung zu Grunde liegt, dass die Reibung nur durch die relativen Bewegungen der Flüssigkeitstheilchen, also durch die Grösse $\partial u / \partial x$, $\partial v / \partial y$, $\partial w / \partial z$, $\partial v / \partial z + \partial w / \partial y$, $\partial w / \partial x + \partial u / \partial z$, $\partial u / \partial y + \partial v / \partial x$ bedingt werden, welche die Dilatationsgeschwindigkeiten darstellen. Das Raumintegral gibt demnach die in der Zeiteinheit in der Flüssigkeit durch die Reibung in Wärme umgewandelte Energiemenge an. Um diesen Betrag wird die durch die Oberfläche eingetretene Energie vermindert. Eine sehr ähnliche Gleichung für die Energieströmung werden wir beim electromagnetischen Felde antreffen.¹⁾ Beide Fälle haben das gemeinsame, dass auch im stationären Zustande Energiebewegung stattfindet, die bei conservativen Systemen nicht eintreten kann.

Die Strömungskomponenten lauten:

$$4a \left\{ \begin{aligned} u &= -u(p - hV + \tfrac{1}{2} h q^2) + h k^2 \left[2 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ v &= -u(p - hV + \tfrac{1}{2} h q^2) + h k^2 \left[2 v \frac{\partial v}{\partial y} + u \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \\ w &= -u(p - hV + \tfrac{1}{2} h q^2) + h k^2 \left[2 w \frac{\partial w}{\partial z} + u \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

Sie enthalten ebenfalls noch die Reibungsconstante. Es rührt dies daher, dass die Druckkräfte in einer reibenden Flüssigkeit infolge der Reibung verändert erscheinen. In den Strömungskomponenten des electromagnetischen Feldes kommt die der Reibungsconstante entsprechende Leitungsfähigkeit nicht vor.

Ist die Flüssigkeit compressibel, so kann durch die elastische Wirkung eine fortschreitende Energiebewegung hervorgerufen werden.

Die Schallgeschwindigkeit ist die Vorstellung einer mit bestimmter Geschwindigkeit fortströmenden Energiemenge. Wir können dieselbe nach den vorausgegangenen Auseinandersetzungen schärfer definiren.

1) Vgl. w. u.

Wir hatten nach Gleichung 6)

$$(6) \quad \begin{cases} u = h \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = h \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w = h \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases}$$

Wenn wir nun eine bestimmte Geschwindigkeit der Energiebewegung auffinden wollen, müssen wir die Componenten u, v, w , der Strömung nach den Festsetzungen, die im § 1 gemacht sind, durch die Dichtigkeit der Energie r dividiren. Diese Bestimmung ist in unserm Falle eindeutig, weil zu gewisser Zeit Ruhe in der Flüssigkeit herrschen kann und dann von einer Stelle eine Erschütterung sich ausbreitet. Um r zu erhalten gehen wir auf die Gleichung

$$dp = a^2 dh$$

zurück, wo p den Druck, h die Dichtigkeit und a eine Constante bezeichnen, welche nur von der Beschaffenheit der Flüssigkeit abhängt.

Es sollen nun zunächst die Aenderungen der Dichtigkeit als unendlich klein angesehen werden.

Setzt man

$$dh = \sigma h_0,$$

so kann man σ als Verdichtung der Luft an der betreffenden Stelle bezeichnen. Man erhält dann die Gleichungen

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -a^2 \sigma. \end{cases}$$

Die potentielle Energie ist $p dv$, wenn p den Druck, v das Volumen bezeichnet. In unserem Falle ist

$$p = a^2 h_0 \sigma$$

$$dv = \frac{m}{h_0} - \frac{m}{h_0(1+\sigma)} = \frac{m\sigma}{h_0} = dx dy dz.$$

Die ganze potentielle Energie ist

$$= \frac{1}{2} \iiint \frac{h_0}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx dy dz.$$

Die kinetische Energie ist

$$= \frac{1}{2} \iiint h_0 \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz.$$

Hieraus ergibt sich für

$$r = \frac{h_0}{2} \left\{ \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\}$$

Es muss dann die Gleichung der Continuität, welche schon in den Green'schen Integralen implicirt steckt, erfüllt sein, nämlich:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit, wenn man die Ausdrücke für r , u , v , w einsetzt und die Gleichung (8) berücksichtigt und die Richtung der Normale beachtet.

Zerlegen wir nun

$$u = r \frac{d\xi}{dt} \quad v = r \frac{d\eta}{dt} \quad w = r \frac{d\zeta}{dt},$$

so sind ξ , η , ζ die Componenten der Geschwindigkeit der Energiebewegung. Dieselben sind, wenn wir die Geschwindigkeit nach aussen positiv nehmen

$$\frac{d\xi}{dt} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{r} \quad \frac{d\eta}{dt} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{r} \quad \frac{d\zeta}{dt} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial z}}{r}$$

Wir beschränken uns nun auf die Betrachtung kugeliger Wellen, welche vom Punkte $x = y = z = 0$ erregt werden. Dann ist

$$r = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2.$$

Ist noch

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2,$$

so wird

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \frac{2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial r}}{a^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2}.$$

Da φ im allgemeinen die Form

$$\frac{1}{r} F_1(r - at) + \frac{1}{r} F_2(r + at)$$

besitzt, wodurch zwei entgegengesetzt gerichtete Wellenzüge dargestellt werden, so kann man jeden für sich betrachten und erhält für den ersten

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \frac{\frac{2aF_1^2}{r^3} - \frac{2aF_1F_1}{r^3}}{\frac{F_1^2}{r^3} + \left(\frac{F_1}{r} - \frac{F_1}{r}\right)^2}.$$

Wenn nun F eine periodische Function ist, so wechselt das zweite Glied das Zeichen, wenn das Argument um $\pi/2$ wächst, während das erste sein Zeichen nicht verändern kann. Dieses gibt die fortströmende Energie an, während das zweite einen Hin- und Herstrom von Energie ausdrückt. Dieser überwiegt in der Nähe der Erregungsstelle, während er in grosser Entfernung gegen die fortströmende Energiemenge verschwindet.

Für $r = \infty$ sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -a \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

$d\varphi/dt$ also unabhängig von φ .

Es bleibt dann

$$\frac{d\varphi}{dt} = a,$$

a ist also die constante Schallgeschwindigkeit für grosse Entfernungen.

Bei der Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite ist die Geschwindigkeit der Energiebewegung im allgemeinen abhängig von der Geschwindigkeit der Luft. Wenn wir annehmen, dass die Bewegung parallel der x -Axe vor sich gehe, so erhalten wir

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{u(p + \frac{1}{2}hu^2)}{\int p \frac{\partial u}{\partial x} dt + \frac{1}{2}hu^2}.$$

Es hängt also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit vor allem auch noch davon ab, welche Function der Dichtigkeit der Druck p ist.

Diese Luftwellen, deren analytische Behandlung zuerst von Riemann¹⁾ durchgeführt ist, zeigen noch das physikalisch

1) Riemann, Gesammelte Werke, p. 145.

wichtige Verhalten, dass bei ihnen unstetige Aenderungen der Dichtigkeit und der Geschwindigkeit eintreten können.¹⁾

Eine solche Unstetigkeitsstelle möge mit der Geschwindigkeit c fortleiten. Dann müssen an ihr stetig sein, die Flüssigkeitsmengen und die Energiemengen, welche durch sie hindurchfliessen. Sind die Geschwindigkeiten an beiden Seiten derselben u_1 und u_2 , und setzen wir

$$u_1 = c + v_1 \quad u_2 = c + v_2,$$

so erfordert die erste Bedingung, dass

$$h_1 v_1 = h_2 v_2.$$

Da die Werthe von u_1 , u_2 , h_1 , h_2 an beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle beim Fortschreiten derselben sich nicht ändern, so wird Energie durch dieselbe nur fliessen können, indem durch die Druckdifferenz die hindurcheilende Masse von der Geschwindigkeit v_1 zu v_2 relativ zur Unstetigkeitsstelle gehoben wird. Die von der ersten Seite fliessende Energiemenge, gemessen durch die Beschleunigung durch die Druckdifferenz, ist also im Flächenelement ds

$$ds u_1 = (p_1 - p_2) v_1 ds$$

die durch ds auf der anderen Seite eintretende gemessen durch die Beschleunigung der Masse $v_1 h_1$

$$ds u_2 = v_1 (v_2 - v_1) v_1 h_1 ds.$$

Also da $u_1 = u_2$

$$p_1 - p_2 = (v_2 - v_1) v_1 h_1.$$

Die oben abgeleiteten Differenzialgleichungen verlieren an der Unstetigkeitsstelle ihre Giltigkeit.

Der eben betrachtete Fall ist, abgesehen von seinem speciellen Interesse, noch deshalb besonders wichtig, weil er zeigt, dass den physikalischen Anforderungen an Unstetigkeitsflächen Genüge geschieht, wenn die Strömung der Massen

1) Lord Rayleigh (Theory of Sound II. p. 41) hat darauf hingewiesen, dass eine solche Bewegung, wie sie Riemann hier annimmt, nur durch Einwirkung äusserer Kräfte aufrecht erhalten werden könne. Der Beitrag dieser Kräfte alterirt indessen nicht unsere Betrachtungen.

und der Energie durch dieselben ihre Stetigkeit bewahrt. Die übrigen physikalischen Grössen können unstetige Werthe annehmen. Wir werden noch später Gelegenheit haben, auf diese Bemerkung zurückzukommen.

§ 3.

Elastische feste Körper.

In der reinen Mechanik bieten noch die elastischen festen Körper für unsere Betrachtungen besonderes Interesse.

Die Differenzialgleichungen der Bewegung lauten für diese, wenn man mit ξ , η , ζ die unendlich kleinen Verschiebungen, mit k und Θ constante Grössen bezeichnet, ferner mit h die Dichtigkeit und mit V das Kräftepotenzial

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= h \frac{\partial V}{\partial x} + k \left\{ 2(1 + \Theta) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right. \\ &\quad \left. + (1 + 2\Theta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + (1 + 2\Theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} \right\} \\ h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= h \frac{\partial V}{\partial y} + k \left\{ 2(1 + \Theta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right. \\ &\quad \left. + (1 + 2\Theta) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + (1 + 2\Theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial z} \right\} \\ h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= h \frac{\partial V}{\partial z} + k \left\{ 2(1 + \Theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. + (1 + 2\Theta) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + (1 + 2\Theta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Multiplicirt man die Gleichungen mit $\partial \xi / \partial t$, $\partial \eta / \partial t$, $\partial \zeta / \partial t$, addirt sie und integrirt partiell, so ist, wenn wir noch setzen

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ x_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x} & y_z &= z_y = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ y_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y} & z_x &= x_z = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ z_z &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} & x_y &= y_x = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned}$$

und die Integration über einen geschlossenen Raum erstrecken

$$\begin{aligned}
& - \iiint h \left\{ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right\} dx dy dz \\
& = k \int ds \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial t} \left(2(x_z + \Theta \sigma) + h F \right) \cos nx + x_y \frac{\partial \xi}{\partial t} \cos ny + x_z \frac{\partial \xi}{\partial t} \cos nz \right. \\
& \quad + \frac{\partial \eta}{\partial t} \left(2(y_y + \Theta \sigma) + h F \right) \cos ny + y_x \frac{\partial \eta}{\partial t} \cos nx + y_z \frac{\partial \eta}{\partial t} \cos nz \\
& \quad + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \left(2(z_z + \Theta \sigma) + h F \right) \cos nz + z_x \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cos nx + z_y \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cos ny \\
& \quad + \iiint dx dy dz \left\{ 2x_x \frac{\partial x_x}{\partial t} + 2y_y \frac{\partial y_y}{\partial t} + 2z_z \frac{\partial z_z}{\partial t} + 2x_y \frac{\partial x_y}{\partial t} \right. \\
& \quad \left. + y_z \frac{\partial y_z}{\partial t} + z_x \frac{\partial z_x}{\partial t} + 2\Theta \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\}
\end{aligned}$$

Die gegen die innern elastischen Kräfte des Systems geleistete Arbeit stellt die potenzielle Energie dar; dieselbe ist

$$F = - \iiint dx dy dz \cdot f,$$

wo

$$f = -k \{ x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2} x_y^2 + \frac{1}{2} x_z^2 + \frac{1}{2} y_z^2 + \Theta \sigma^2 \}.$$

Das Raumintegral auf der rechten Seite der obigen Gleichung ist also

$$= + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Das auf der linken ist

$$= - \frac{\partial L}{\partial t},$$

es ist also $\partial / \partial t (F + L)$ durch das Oberflächenintegral dargestellt.

Es folgt also hier

$$(10) \quad \begin{cases} u = +k \left\{ \left(2(x_z + \Theta \sigma) + h F \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} + x_y \frac{\partial \eta}{\partial t} + x_z \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right\} \\ v = +k \left\{ \left(2(y_y + \Theta \sigma) + h F \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + y_x \frac{\partial \xi}{\partial t} + y_z \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right\} \\ w = +k \left\{ \left(2(z_z + \Theta \sigma) + h F \right) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + z_x \frac{\partial \xi}{\partial t} + z_y \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\}. \end{cases}$$

In einem isotropen elastischen Medium können sich sowohl longitudinale, wie auch transversale Verrückungen fortpflanzen. Wir können die Geschwindigkeit der Energie-

bewegung ermitteln. Verfolgen wir longitudinale ebene Schwingungen ξ in der Richtung x , so haben wir

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{2k}{h} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} (1 + \Theta)$$

$$u = 2k(1 + \Theta) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$r = \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 k(1 + \Theta),$$

also, da

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \sqrt{\frac{2k}{h} (1 + \Theta)} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{u}{r} = \sqrt{\frac{2k}{h} (1 + \Theta)},$$

ebenso bei transversalen ebenen Schwingungen, wenn

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{k}{h} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$w = k \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\frac{w}{r} = \sqrt{\frac{k}{h}}.$$

Bei Transversalwellen, welche in einer beliebigen Richtung vor sich gehen, kann man schreiben

$$\xi = \alpha \sigma \quad \eta = \beta \sigma \quad \zeta = \gamma \sigma$$

$$lx + my + nz = s,$$

wo die $\alpha, \beta, \gamma, l, m, n$ Richtungscosinus bezeichnen, welche an die Bedingung

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0$$

gebunden sind, dann gilt die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{k}{h} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}.$$

Betrachten wir nun eine Ebene, welche durch die Linie l, m, n gelegt sein möge, sodass wir haben

$$al + bm + cn = 0,$$

wenn a, b, c die Richtungscosinus der Normale der Ebene bezeichnen, und berechnen die Energieströmung, welche durch diese Ebene fließt. Dieselbe ist

$$\begin{aligned} & u a + v b + w c \\ &= k \frac{\partial \sigma}{\partial s} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \{ 2 \alpha^2 l a + 2 \beta^2 m b + 2 \gamma^2 n c \\ &+ (\alpha m + \beta l) \beta a + (\gamma l + \alpha n) \gamma a \\ &+ (\alpha m + \beta l) \alpha b + (\beta n + \gamma m) \gamma b \\ &+ (\gamma l + \alpha n) \alpha c + (\beta n + \gamma m) \beta c \}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck verschwindet bei Berücksichtigung der Beziehungen zwischen l, m, n und $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$. Die Energie fließt also überall in Richtung der Linie l, m, n . Uebrigens können auf beiden Seiten der betrachteten Ebene die Strömungscomponenten sich um endliche Werthe unterscheiden, ganz analog, wie in einer vollkommenen Flüssigkeit discontinuirliche Bewegungen vorkommen können. Diese Betrachtungen sind deshalb noch von besonderem Interesse, als sie ohne weiteres auf die Lichtbewegung angewandt werden können. Die Gleichungen vereinfachen sich in diesem Falle noch dadurch, dass man den Lichtäther als incompressibel anzusehen hat, so dass $\sigma = 0$ wird. Dann hören auch die Longitudinalwellen auf zu existiren. Wenn man auf dem Boden der Elasticitätstheorie stehen bleiben will, muss man die Annahme machen, dass die Dichtigkeit des Aethers überall unverändert bleibt und die verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in verschiedenen Medien von der Verschiedenheit der Elasticität herrühre.

Wir haben oben gesehen, dass an der Grenze heterogener Medien die Strömung der Masse und der Energie normal zur Trennungsfläche stetig bleiben muss. Wir wollen dieselbe nun für die Lichtbewegung aufsuchen. Wir nehmen dabei die Ebene $z = 0$ als Trennungsfläche an.

Dann gibt die erste Bedingung

$$(11) \quad \zeta = \zeta',$$

wo der Strich sich auf das zweite Medium bezieht, die zweite

$$(12) \quad w = w'.$$

Man kann nun w schreiben, wenn man berücksichtigt, dass $\sigma = 0$ ist

$$= k \left\{ -2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\}.$$

Diese Grenzbedingung ist dieselbe, welche von Kirchhoff¹⁾ abgeleitet ist aus der Hypothese, dass die Differenz der Arbeit der Druckkräfte an beiden Seiten der Trennungsfläche verschwinde.

Man erkennt dies leicht, wenn man bedenkt, dass die Arbeit, welche die Druckkräfte leisten, die Strömung der Energie in dem von uns gebrauchten Sinne darstellt.

In der That gibt der Kirchhoff'sche Ausdruck für isotrope Medien für diese Arbeit

$$= -k \left[\left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right\} \frac{\partial \xi}{\partial t} + 2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + 2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right]$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem unserigen überein.

Die beiden Grenzbedingungen sind physikalisch notwendig, weil die Erfahrung zeigt, dass keine Umwandlung der Lichtenergie in andere Formen an der Grenze durchsichtiger Medien stattfindet. Aus der reinen Elasticitätstheorie würden die Grenzbedingungen $\zeta = \zeta'$, $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ und Gleichheit der Drucke auf die Trennungsfläche folgen. Die letzte Bedingung ist bekanntlich für die Lichtbewegung nicht zutreffend. Da man den Boden der Elasticitätstheorie mit dem Aufgeben derselben verlässt, kann man auch die beiden Bedingungen $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ nur als hypothetische bezeichnen.

Die Theorie von Sir William Thomson auf Grund eines contractilen labilen Aethers, in welchem die longitudinalen Wellen eine verschwindende Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben, fusst bei der Grenzbedingung ganz auf den Gesetzen für elastische feste Körper. Die Stetigkeit der Energiebewegung folgt dann naturgemäss von selbst, obwohl der Aether den Raum nicht notwendig stetig zu erfüllen braucht.

1) G. Kirchhoff, Ueb. die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze krystallinischer Mittel. Ges. Abh. p. 352.

Wir wollen nun dazu übergehen, die Energiebewegung zu verfolgen, wie sie von einer, im Punkte $x = y = z = 0$ des elastischen Mediums erregten Schwingung sich verbreitet.

Wir nehmen an, dass die Schwingung parallel der z -Axe vor sich gehe und setzen

$$\xi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x} \quad \eta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad \zeta = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

wo φ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{k}{h} \Delta \varphi$$

ist. Wir nehmen die Lösung

$$\varphi = \frac{\mathfrak{A} \cos(m - nt)}{r}$$

wo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\frac{n^2}{m^2} = \frac{k}{h}$$

ist. Im Nullpunkte ist

$$\varphi = \frac{\mathfrak{A} \cos nt}{r}$$

also

$$\Delta \varphi = 0 \quad \zeta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

In der Nähe des Nullpunktes ist die Bewegung die einer incompressibeln Flüssigkeit mit dem Geschwindigkeitspotential

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mathfrak{A} \cos nt \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r},$$

wie es bei der Bewegung einer kleinen Kugel in der Flüssigkeit hervorgerufen wird. Es ist dies dasselbe Gleichungensystem, welches von Hrn. Hertz¹⁾ für electrische Schwingungen aufgestellt ist.

Es folgen dann die Werthe für die Strömungscomponenten der Energie, wenn $mr - nt = \alpha$ gesetzt wird:

1) Hertz, Ueber die Kräfte electrischer Schwingungen. Wied. Ann. 36. p. 1. 1889.

$$u = \mathfrak{A}^2 k n x \left\{ - \frac{m^5}{r^5} (x^2 + y^2) \sin^2 \alpha \right. \\ - 4 \frac{m^4}{r^6} (x^2 + y^2) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{m^3}{r^7} (7 (x^2 + y^2) - 4 z^2) \sin^2 \alpha \\ - \frac{m^3}{r^7} (3 (x^2 + y^2) + 12 z^2) \cos^2 \alpha + \frac{m^2}{r^8} (15 r^2 + 21 z^2) \sin \alpha \cos \alpha \\ - \frac{m}{r^9} (6 (x^2 + y^2) + 30 z^2) \sin^2 \alpha + \frac{m}{r^9} (6 (x^2 + y^2) + 30 z^2) \cos^2 \alpha \\ \left. - \frac{1}{r^{10}} (6 (x^2 + y^2) + 30 z^2) \sin \alpha \cos \alpha \right\}$$

$$w = \mathfrak{A}^2 k n z \left\{ - \frac{m^5}{r^5} (x^2 + y^2) \sin^2 \alpha \right. \\ - 4 \frac{m^4}{r^6} (x^2 + y^2) \sin \alpha \cos \alpha + 11 (x^2 + y^2) \frac{m^3}{r^7} \sin^2 \alpha \\ - \frac{m^3}{r^7} (8 z^2 - (x^2 + y^2)) \cos^2 \alpha \\ + \frac{m^2}{r^8} (11 (x^2 + y^2) + 32 z^2) \sin \alpha \cos \alpha \\ \left. - \frac{m}{r^9} (24 z^2) \sin^2 \alpha + \frac{m}{r^9} 24 z^2 \cos^2 \alpha - \frac{24 z^2}{r^{10}} \sin \alpha \cos \alpha \right\}$$

Den Ausdruck für v gewinnt man aus u durch Vertauschung des x mit y .

Die Formeln sind ziemlich verwickelt und für den Gebrauch unbequem; sie vereinfachen sich aber ausserordentlich, wenn man den Integralwerth der Energieströmung über eine sehr lange Zeit erhalten will.

Nun ist

$$\int_0^{T_1} \sin^2 \alpha dt = - \frac{(m r - n T_1)}{2 n} + \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{2 n} + \frac{m r}{2 n} + \frac{\sin m r \cos m r}{r}$$

$$\int_0^{T_1} \cos^2 \alpha dt = - \frac{(m r - n T_1)}{2 n} - \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{2 n} + \frac{m r}{2 n} - \frac{\sin m r \cos m r}{r}$$

$$\int_0^{T_1} \sin \alpha \cos \alpha dt = - \frac{1}{2 n} \sin^2 \alpha_1.$$

Ist nun T unendlich gross gegen die Periode der Schwingung, so verschwinden die periodischen Glieder gegen die nicht periodischen und es bleibt

$$(15a) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{T_1} u \, dt &= T_1 \mathfrak{A}^2 K n x \left\{ -\frac{m^5}{2 r^5} (x^2 + y^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^3}{r^7} (4(x^2 + y^2) - 16 z^2) \right\} \\ \int_0^{T_1} w \, dt &= T_1 \mathfrak{A}^2 K n z \left\{ -\frac{m^5}{2 r^5} (x^2 + y^2) \right. \\ &\quad \left. + (12(x^2 + y^2) - 8 z^2) \frac{m^3}{r^7} \right\} \end{aligned} \right.$$

Ebenso

$$\int_0^{T_1} v \, dt = T_1 k n \mathfrak{A}^2 y \left\{ -\frac{m^5}{2 r^5} (x^2 + y^2) + \frac{m^3}{r^7} (4(x^2 + y^2) - 16 z^2) \right\}$$

Da die Strömung der Energie hier eine stationäre ist, so muss die Gleichung der Continuität

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

erfüllt sein. Man überzeugt sich leicht durch Rechnung, dass dies thatsächlich der Fall ist. In den obigen Formeln hat \mathfrak{A} die Dimension $[l^4]$

$$k = \left[\frac{l^3}{t^2} \right] \quad m = [l^{-1}] \quad n = [t^{-1}].$$

Eine weitere Vereinfachung tritt ein, wenn die Entfernung r unendlich gross gegen $1/m$ wird. Dann behält man, wenn wir noch $\mathfrak{A}^2 \cdot k n = \mathfrak{B}$ setzen:

$$(15b) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{T_1} u \, dt &= -T_1 \mathfrak{B} x \frac{m^5}{2 r^5} (x^2 + y^2) = \mathfrak{U} \\ \int_0^{T_1} v \, dt &= -T_1 \mathfrak{B} y \frac{m^5}{2 r^5} (x^2 + y^2) = \mathfrak{B} \\ \int_0^{T_1} w \, dt &= -T_1 \mathfrak{B} z \frac{m^5}{2 r^5} (x^2 + y^2) = \mathfrak{B} \end{aligned} \right.$$

Bei den Strahlungen, welche durch die Wärmebewegung hervorgerufen werden, haben die erregenden Schwingungen innerhalb messbarer Zeitintervalle keine bevorzugte Richtung.

Wir wollen nun durch den Index z bezeichnen, dass die erregende Schwingung diese Richtung haben soll, ebenso durch x und y .

Wir bilden dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} &= -\mathfrak{B}_1 T_1 \frac{xy}{r^5} & \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}_z}{\partial z} &= +\mathfrak{B}_1 T_1 \frac{zx}{r^5} \\ \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial x} &= -\mathfrak{B}_1 T_1 \frac{xx}{r^5} \\ \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} &= \mathfrak{B}_1 T_1 \frac{xy}{r^5} & \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}_y}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{U}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} &= -\mathfrak{B}_1 T_1 \frac{xy}{r^5} & \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} &= \mathfrak{B}_1 T_1 \frac{zy}{r^5}. \end{aligned}$$

Bei unserer Voraussetzung, dass die Schwingungen nach allen Richtungen gleich gross sind, wird $\mathfrak{B}_x = \mathfrak{B}_y = \mathfrak{B}_z$ und wenn wir setzen

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_x + \mathfrak{U}_y + \mathfrak{U}_z \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} = 0.$$

Es existirt also eine Function φ derart, dass

$$\begin{aligned} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \mathfrak{U} \\ + \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \mathfrak{B} \\ + \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \mathfrak{B} \end{aligned} \quad \Delta \varphi = 0,$$

es ist $\varphi = \mathfrak{B} T_1 / r$; es hat dieselbe Form wie die Potentialfunction anziehender Massen; eine durch ungeordnete Molecularbewegungen strahlende Oberfläche müsste, wenn sich die Energieausbreitung von jedem Molecül aus unabhängig von der Existenz der übrigen anordnete, zu einer Vertheilung der Energieströmung führen, wie die Vertheilung der electricischen Kraftlinien um eine geladene Oberfläche.

Die strahlenden Oberflächen zeigen aber ein anderes Verhalten. Nehmen wir zwei Flächenelemente ds_1 und ds_2 , deren Normalen n_1 und n_2 sein mögen. Ihr Abstand sei r . Die

oben abgeleiteten Formeln bleiben unverändert gültig, wenn wir $x y z$ durch $(x - x'), (y - y'), (z - z')$ ersetzen.

Aus unseren bisherigen¹⁾ Betrachtungen folgt nun, dass die Energiemenge, welche von ds_1 herrührend durch ds_2 strömt, abhängig ist von der Richtung der Normale des letzteren ds_2 . Nehmen wir nun an, ds_1 und ds_2 seien vollkommen schwarz und diffus, so folgt aus dem Kirchhoff'schen Satze, dass bei gleicher Temperatur ds_1 ebensoviel Energie von ds_2 erhält, als es ihm zusendet, also muss die Energieströmung, welche von ds_2 ausgeht, abhängig sein von der Richtung der Normale n_2 . Der Factor, welcher diese Abhängigkeit anzeigt sei ϵ_2 und ϵ_1 bei ds_1 , dann muss ϵ_2 in ϵ_1 übergehen, wenn man 2 und 1 vertauscht.

Es soll also sein

$$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n_1}$$

oder

$$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos(n_2 r) = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos(n_1 r)$$

$$\epsilon_1 \cos(n_2 r) = \epsilon_2 \cos(n_1 r).$$

Hieraus folgt dann

$$\epsilon_1 = \cos(n_1 r) \quad \epsilon_2 = \cos(n_2 r).$$

Die Voraussetzungen, aus denen das Cosinusetz folgt, sind also, dass die strahlende Oberfläche vollkommen diffus sei und dass der Kirchhoff'sche Satz gelte.

§ 4.

Electricität und Magnetismus.

Durch die Ideen von Faraday und Maxwell ist die Vorstellung von Fernkräften zuerst auf die unmittelbare stetige Wirkung von benachbarten Theilen zurückgeführt worden. Dieselben haben auch den Begriff der Lokalisierung der Energie zuerst entstehen lassen.

Faraday selbst spricht schon von einer Bewegung der Kraftlinien durch den Raum und benutzt dieselbe als Maass für die inducirte electromotorische Kraft in geschlossenen Bahnen. Heute, nachdem die Maxwell'sche Theorie als die

1) Vgl. p. 23.

einzig anerkannt ist, welche die electromagnetischen Erscheinungen in widerspruchsfreier Weise darzustellen vermag, ist uns sein Standpunkt um vieles näher gerückt. In den Anschauungen, von Faraday sowohl wie von Maxwell, ist eine wesentliche Lücke geblieben, bei der Behandlung der Vorgänge des galvanischen Stromes. Dieselbe ist, wie bereits erwähnt, von Poynting ausgefüllt worden. Nach seiner Vorstellung bewegen sich die Kraftlinien senkrecht zu ihrer Richtung durch den Raum von der electromotorischen Stelle aus auf den Leiter zu, verschwinden in ihm und werden dort in Wärme umgewandelt.

Es seien $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ die Componenten der electrischen und magnetischen Polarisationen, X, Y, Z, L, M, N die der electrischen und magnetischen Kräfte, u, v, w die der electrischen Strömung, $1/A$ die Lichtgeschwindigkeit, so sind die Grundgleichungen des allgemein veränderlichen electromagnetischen Feldes auf Grund der Maxwell'schen Theorie in der Form, wie sie ihnen von Herrn Hertz¹⁾ gegeben ist:

$$16) \quad \begin{cases} A \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} & A \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A u \\ A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} & A \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A v \\ A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} & A \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A w \end{cases}$$

Die Energie des Feldes ist

$$17) \quad \begin{cases} F + L = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{X} X + \mathfrak{Y} Y + \mathfrak{Z} Z) \\ \quad \quad \quad + \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{L} L + \mathfrak{M} M + \mathfrak{N} N). \end{cases}$$

Multipliciren wir die Gleichungen 16) mit $(1/4\pi A) dx dy dz$ dann beziehlich mit L, M, N, X, Y, Z , addiren sie und integriren über einen geschlossenen Raum. Dann ergibt sich, wenn wir noch berücksichtigen, dass

$$L \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \mathfrak{Z} \frac{\partial L}{\partial t} \text{ u. s. w.}$$

wie aus den Beziehungen von \mathfrak{Z} zu L folgt,

1) Hertz, Gött. Ber. p. 106. 1890.

$$\frac{\partial (F + L)}{\partial t} + \iiint \{uX + vY + wZ\} dx dy dz$$

$$= -\frac{1}{4\pi A} \int [(NY - MZ) \cos nx + (LZ - NX) \cos ny$$

$$+ (MX - LY) \cos nz] ds$$

Wir haben in dem Raumintegral den Energiebetrag, welcher aus anderer Quelle als dem electromagnetischen Energievorrath her stammt. Es sind dies die Energiebeträge, welche entweder durch thätige sogenannte electromotorische Kräfte den Energievorrath des electromagnetischen Systems vermehren, oder die als Joule'sche Wärme denselben entzogenen Beträge.¹⁾ Wenn man diese mit zur Betrachtung heranzieht, werden die Componenten der Energieströmung

$$(18) \quad u = + \frac{1}{4\pi A} (NY - MZ)$$

$$v = + \frac{1}{4\pi A} (LZ - NX)$$

$$w = + \frac{1}{4\pi A} (MX - LY)$$

An der Grenze verschiedenartiger Körper muss, wie wir oben sehen, die Strömung der Energie normal zur Oberfläche stetig sein. Sei die xy Ebene eine solche Trennungsfläche, so muss

$$(19a) \quad w_1 = w_2$$

für $z = 0$ sein. Es muss also sein

$$M_1 X_1 - L_1 Y_1 = M_2 X_2 - L_2 Y_2.$$

Für allgemeine Werthe sind nun

$$(19b) \quad X_1 = X_2, Y_1 = Y_2, M_1 = M_2, L_1 = L_2.$$

Es sind dies die bekannten Grenzbedingungen, dass die Kraftcomponenten parallel der Trennungsfläche sich stetig durch dieselbe fortsetzen müssen. Die Gleichung 19 a) ist demgemäss erfüllt.

Aus den Gleichungen 18) folgt zunächst, dass die Energie sich in Ruhe befindet, falls in dem System entweder nur elec-

1) Auf die Analogie zur reibenden Flüssigkeit wurde bereits oben hingewiesen.

trische oder nur magnetische Kraftlinien vorhanden sind. Wenn daher, wie von Sir William Thomson¹⁾ vermuthet wird, beim ruhenden Magnetismus verborgene Bewegungen vorhanden sind, so können dieselben nur stationäre²⁾ sein. Wenn dagegen ein ruhender Magnet in den Bereich der Kraftlinien eines electrisch geladenen Körpers geführt wird, muss eine dauernde Bewegung der Energie eintreten. Man erkennt aus den Gleichungen 18) dass die Energie sich stets senkrecht bewegt zu den electrischen und magnetischen Kraftlinien. Dort, wo die magnetischen und electrischen Kraftlinien parallel laufen, ist die Energieströmung Null. Wenn z. B. ein cylindrischer Magnetstab und ein geladener cylindrischer Condensator mit parallelen Axen nebeneinander gestellt werden, so bewegt sich die Energie in geschlossenen Bahnen, sowohl um die Axe des Magnets als um die des Condensators in Ebenen die senkrecht stehen auf beiden Axen. Legt man eine Ebene von dieser Art durch die Mitte des Polabstandes, so sind in ihr keine Stromlinien der Energie vorhanden. Auf der einen Seite von ihr gehen die Stromlinien ihr parallel in derselben Richtung um beide Axen, auf der andern in der entgegengesetzten. Das eigenthümliche dieses Vorganges besteht darin, dass ein stationäres und ein statisches System nebeneinander gebracht ein nicht mehr in Bezug auf seine verborgenen Bewegungen stationäres System geben, ohne dass dabei sich etwas an der Configuration des Systems verändert.

Wir gehen nun dazu über die Bewegung der Energie bei stationären galvanischen Strömen zu betrachten. Die Componenten der electrischen Kräfte haben in diesem Falle ein Potenzial, ebenso die der magnetischen Kräfte an solchen Orten, wo die Componenten der electrischen Strömung u , v , w verschwinden. Die Grundlage für die Theorie des constanten galvanischen Stromes bildet die durch die Erfahrung hinlänglich gerechtfertigte Annahme, dass in Leitern von cylindrischer Form deren Querschnitt klein gegen die Länge ist, u , v , w unveränderlich sind im ganzen Querschnitte des Drahtes.

Wir betrachten jetzt ein Stück des Drahtes von der Länge l ,

1) Thomson, Proc. of the Royal Society, Juni 1856.

2) Nur in einem in stationärer Bewegung befindlichem System ist die Energie in Ruhe.

das gerade und parallel der x -Axe gerichtet sein möge. Der Radius des Querschnittes sei R . Die electricischen Kraftlinien an der Oberfläche des Drahtes gehen parallel seiner Axe, die magnetischen folgen der Schnittlinie des Querschnittes mit der Oberfläche. Die Energie fliesst also senkrecht zur Oberfläche in den Draht hinein und zwar in der Zeiteinheit die Menge

$$E = v \cos Ry + w \cos Rz = \frac{2 \pi R l X (N \cos Ry - M \cos Rz)}{4 \pi A}$$

Die als electromagnetische Energie einströmende Menge wird nun im Innern des Leiters in Wärme umgesetzt. Denken wir uns eine concentrische Cylinderfläche mit dem Radius ρ , so wird in dem Raum zwischen beiden Flächen der Energiebetrag

$$l \pi (R^2 - \rho^2) u X$$

in Wärme verwandelt. Nun ist bekanntlich nach 16) für unsern Fall im Drahte

$$N = 2 u y \cdot \pi A$$

$$M = -2 u z \pi A.$$

Die Energie, welche durch die Oberfläche ρ fliesst ist also

$$E_\rho = \frac{E \rho^2}{R^2}$$

Da zwischen dem X und u , wenn λ die Leitungsfähigkeit des Metalls ist, ϵ die Dielectricitätsconstante desselben, die Gleichungen ¹⁾ (nach dem Ohm'schen Gesetz)

$$(20) \quad \lambda X = u, A \epsilon \frac{\partial X}{\partial t} = -4 \pi \lambda A X$$

bestehen, welche anzeigen, dass auch die Kraftlinien den ganzen Cylinder gleichmässig erfüllen, also die Zahl der Kraftlinien, welche durch die äussere Oberfläche tritt, zu der, welche durch ρ hindurchgeht, sich verhält wie R/ρ , so folgt, dass auch die magnetischen Kräfte nach innen zu abnehmen müssen wie ρ/R ; es steht dies in Uebereinstimmung mit der bekannten Regel, dass im Innern eines vom Strome durchflossenen cylindrischen Leiters die vom betrachteten Punkte nach aussen hin liegende Schaafe keine magnetische Wirkung ausübt.

1) H. Hertz, a. a. O. p. 115.

Aus den Gleichungen 20) folgt

$$X = X_0 e^{-\frac{4\pi\lambda t}{\epsilon}}$$

wo X_0 den Werth von X zur Zeit $t = 0$ bezeichnet. Die Grösse $4\pi\lambda/\epsilon$ ist der reziproke Werth der von A. Cohn¹⁾ sogenannten Relaxationszeit.

Die Leitungsfähigkeit spielt hier die Rolle eines Absorptionsindex, welcher das Maass ist für die Fähigkeit des Metalls electricische Kraftlinien in Wärme umzusetzen.

Wir gehen nun dazu über, die Vorgänge zu betrachten, welche sich in einem geschlossenen Stromkreis, in welchem sich eine electromotorische constant wirkende Stelle befindet, abspielen.

Obwohl die Anschauungen, von welchen wir hier ausgehen, grundverschieden sind von denen, welche den älteren Theorien zu Grunde lagen, sind die Formen in analytischer Beziehung ganz dieselben.

In der That hatte man²⁾ in einem Drahtstücke das parallel der X -Axe laufend gedacht wurde die Gleichung

$$u = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

wo φ das electricische Potential bedeutete, das mit dem von uns so bezeichneten identisch ist. Dagegen deutete man u als die in der Zeiteinheit durch die Einheit des Querschnitts fliessende Electricitätsmenge, während wir u auffassen als umgekehrt proportional der Zeit, in welcher die Kraftlinien im Innern des Metalls auf einen bestimmten Betrag ihres Anfangswerthes herabsinken. Wir können deshalb die Ergebnisse der früheren Theorien ohne weiteres verwerthen, indem wir den analytischen Resultaten nur andere physikalische Deutungen unterlegen. Wir haben demgemäss φ in unserm Falle überall als stetig anzusehen mit Ausnahme der electromotorischen Stelle, wo φ sich in der Richtung des Drahtes sprungweise verändert. Seien φ_1 und φ_2 die Werthe von φ an beiden

1) A. Cohn, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 26. p. 415. 1888.

2) Vgl. G. Kirchhoff, Ableit. des Ohm'schen Gesetzes. Ges. Abh. p. 58.

Seiten der Unstetigkeitsstelle, so wird, wenn wir die Richtung des Drahtes mit s bezeichnen, das Integral

$$\int \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \lambda (\varphi_2 - \varphi_1)$$

wenn wir λ als überall constant betrachten und die Integration über den ganzen Stromkreis ausdehnen. Der Sprung des Potentials an der electromotorischen Stelle, setzt das Vorhandensein einer electricischen Doppelschicht voraus. Die Electricitätsmengen, welche dieselbe bilden, fassen wir nach der Faraday'schen Anschauungsweise als die freien Enden von Kraftlinien auf. Die Vertheilung der Kraftlinien um die electricische Doppelschicht ist dann folgende:

Von der Rückseite der einen Belegung gehen die Kraftlinien im Innern des Leitungsdrahtes parallel seiner Oberfläche und enden in der zweiten Belegung. Den Raum zwischen der Doppelschicht füllen Kraftlinien von entgegengesetzter Richtung aus. Im freien Aether ordnen sich die Kraftlinien in ähnlicher Weise an wie um einen Condensator, indem sie sich auf die beiden Belegungen stützen und in der Nähe des Leitungsdrahtes diesem parallel laufen. Wenn die Dichtigkeit der freien Electricität in der einen Belegung $+k$, in der anderen $-k$ ist, so hat man

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial s_a} = -4\pi k$$

an der ersteren, wenn die Index i und a sich auf die innere und äussere Seite beziehen.

Ferner ist ¹⁾

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 8\pi k \varepsilon,$$

wenn ε die Entfernung beider Schichten bezeichnet

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial s_a} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}$$

wo l die Länge des Stromkreises bedeutet und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_i} = 4\pi k \left\{ \frac{2\varepsilon}{l} - 1 \right\}.$$

1) v. Helmholtz, Ges. Abh. 1. p. 490.

Aus den beiden letzten Gleichungen ersieht man, wie dicht sich die Kraftlinien im Drahte anordnen müssen im Vergleich zur Dichtigkeit derselben zwischen den beiden Schichten.

Der Energiewerth ist in jedem Augenblicke $= 2\pi \varepsilon k^2 q$, wo q die Grösse der Oberfläche der Doppelschicht bezeichnet. Dieser Energiewerth soll nun durch fremde Hilfsquellen constant auf gleicher Höhe erhalten bleiben. Während nun die im Drahte befindlichen Kraftlinien beständig zerstört werden wandern von aussen her immer so viele zu, als Ersatz erforderlich ist, schliesslich treten die Kraftlinien, welche innerhalb der Doppelschicht sich befinden, heraus, erweitern sich im freien Raume, wandern dann auf den Stromkreis zu, passen sich seiner Form an und treten in ihn hinein. Bei dieser Bewegung durch Raum rufen nun die electricischen Kraftlinien senkrecht zu ihrer Bewegung die magnetischen Kraftlinien hervor.

Der soeben betrachtete Vorgang enthält die wesentlichen Vorstellungen, die wir uns bei der Existenz eines constanten Stromes zu bilden haben. In Wirklichkeit hat man es nie mit so einfachen Verhältnissen, wie wir sie hier der Einfachheit wegen angenommen haben, zu thun. So hat man niemals nur einen Potentialsprung, sondern bei hydroelectricischen Strömen mindestens drei, ausserdem aber noch in den verschiedenen Theilen verschiedene Leitungsfähigkeiten. Es ist ohne weiteres ersichtlich, wie mehrere Doppelschichten die Anzahl der im Innern des Drahtes befindlichen Kraftlinien je nach der Richtung ihrer positiven Seiten vergrössern oder verkleinern müssen, und wie sich hierdurch die Menge der im Drahte umgesetzten electromagnetischen Energie bestimmen muss.

Für anstossende Leiterstücke von verschiedener Leitungsfähigkeit λ und λ_1 gilt die Kirchhoff'sche Bedingungsgleichung

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} = 0$$

für jeden Punkt der Berührungsfläche, d. h. das Product aus der Anzahl der Kraftlinien in das Leitungsvermögen ist in allen Drahtstücken dasselbe. Es treten überall durch die

Oberfläche des Drahtes in der Zeiteinheit gleichviel Kraftlinien ein, in den Drahtstücken, in denen das Leitungsvermögen grösser ist, müssen daher weniger Kraftlinien vorhanden sein, weil dieselben schneller zerstört werden. An der Berührungsfäche befinden sich also freie Enden von Kraftlinien.

Die bisherigen Auseinandersetzungen werden genügen, um für verwickelte Leiterformen, namentlich auch verzweigte, lineare Systeme die entsprechenden Vorstellungen zu bieten.

Die thermoelectrischen Ströme kann man in analoger Weise auffassen, wenn man an der älteren Vorstellung, welche den Sitz der thermoelectrischen Kraft an die Löthstellen verlegte, festhalten will. Einfacher gelangen wir zur Zusammenfassung der Thatsachen, wenn wir von der Theorie von Kohlrausch¹⁾ ausgehen.

Nach dieser haben wir uns den Vorgang in folgender Weise vorzustellen. Ueberall, wo in einem Metall ein Temperaturgefälle vorhanden ist, werden electriche Kraftlinien parallel dem Wärmestrom hervorgerufen. Ihre Anzahl und Richtung hängt ausser von dem Temperaturgefälle von der Natur des Metalls ab.

Ferner, wenn electriche Kraftlinien in einem Metall parallel dem Temperaturgefälle laufen und dort in Wärme umgesetzt werden, findet je nach der Natur des Metalls ein schnelleres oder langsames Fortfliessen des Wärmestromes statt. Diese Sätze enthalten alle Erscheinungen der Thermoelectricität.²⁾

Wir wollen uns nun einen besonders einfachen Fall denken. Es seien zwei dünne Drähte von überall gleichem Querschnitt aber verschiedenem Material zusammengelöthet.

Die Löthstellen sollen auf verschiedener aber constanter Temperatur erhalten werden, und das Temperaturgefälle sei gleichmässig auf die Länge beider Theile vertheilt. Das Material der Drähte sei durch Herstellung von Legirungen so ausgewählt, dass ein bestimmtes Temperaturgefälle in dem einen Drahte ebensoviel Kraftlinien, aber von entgegengesetzter

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. 156. p. 601. 1875 u. Wied. Ann. 23. p. 477. 1884.

2) Boltzmann, Wien. Ber. 15. Dec. 1887.

Richtung, erzeugt wie im andern. Dann sind bei geschlossenem Stromkreis die electromotorischen Kräfte gleichmässig über den gesammten Stromkreis vertheilt. Es treten dann die parallel der Mittellinie des Stromkreises laufenden, geschlossenen Kraftlinien durch die Oberfläche des Drahtes aus. Ebensoviel Kraftlinien treten aber ein, weil die gesammte austretende electromagnetische Energie im Innern des Leiters entweder in Joule'sche Wärme verwandelt oder zu der Arbeitsleistung verbraucht wird, welche die Veränderung des Wärmestromes erfordert, welche sich an den Enden jedes Drahtes als Peltier'sche Wärme zu erkennen gibt. Da also überall gleichviel Kraftlinien aus- und eintreten, verschwinden die Componenten der strömenden Energie u , v , w . Wie diese verschwinden auch die electricischen Kräfte X , Y , Z , weil die austretenden und eintretenden Kraftlinien entgegengesetzte Richtungen haben. Es sind dann weder im Innern des Drahtes noch im äussern Raume electricische Kraftlinien vorhanden. Die magnetischen Kraftlinien sind dann allein noch vorhanden, weil die electricischen Kraftlinien von entgegengesetzter Richtung, welche sich selbst gegenseitig aufheben, durch ihre entgegengesetzte Bewegung gleichgerichtete magnetische Kraftlinien hervorrufen. Ein zweiter Grenzfall, den wir betrachten, ist der; dass der eine Draht überhaupt nicht electromotorisch wirksam ist. Dann entstehen in dem andern Kraftlinien, welche an den Löthstellen enden, diese treten aus dem Draht parallel seiner Oberfläche aus, dehnen sich im Raume aus, legen sich dann an die Oberfläche des zweiten Drahtes an, und treten, indem sie sich immer auf die Berührungsflächen der Drähte stützen, durch die Oberfläche in ihn hinein. Bei stationärem Zustande und sonst gleichmässigen Verhältnissen sind beide Drähte gleichmässig von Kraftlinien erfüllt, deren Richtungen in beiden die entgegengesetzten sind, die Berührungsflächen enthalten also die Enden der Kraftlinien, sie sind nach der alten Ausdrucksweise der Sitz freier Electricität. Es wird ohne weiteres einleuchten, dass die allgemeinen Fälle auf eine Combination der beiden betrachteten zurückzuführen sind. Die soeben dargelegte Anschauungsweise bedarf vergleichsweise einfacher Voraussetzungen. Sie setzt namentlich voraus, dass zwischen verschiedenen Metallen kein Potentialsprung vorhanden

sein kann, welcher von der Temperatur abhängt. Die Möglichkeit der Verwirklichung beider Fälle ist durch die Herstellung von Legirungen gegeben, deren Bestandtheile die electricischen Kraftlinien in entgegengesetzter Richtung bei Temperaturgefälle erzeugen. Wesentlich anders gestalten sich die Vorgänge, wenn wir es mit veränderlichen electricischen und magnetischen Kräften zu thun haben.

Im freien Aether genügen die Componenten der electricischen und magnetischen Kräfte der allgemeinen Gleichung für Strahlungen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{A^2} \Delta \varphi.$$

Wir werden nicht die allgemeinen Functionen, welche Lösungen dieser Gleichung darstellen, im folgenden zu Grunde legen, sondern einfache Schwingungen, aus denen dann durch Fourier'sche Reihen allgemeinere Vorgänge zusammengesetzt werden können.

Wir setzen

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x} & Y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} & Z &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ L &= -A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} & M &= A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} & N &= 0 \\ \varphi &= \mathfrak{B} \frac{\cos(mr - nt)}{r} & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

Es stellen diese Lösungen, wie Hr. Hertz ¹⁾ nachgewiesen hat, die Schwingungen dar, welche von einem electricischen Doppelpunkte hervorgerufen werden, welcher im Punkte $x = y = z = 0$ sich befindet und dessen Ladungen hin und her schwanken.

Setzen wir die Ausdrücke für X, Y, Z, L, M, N in die Gleichungen (18) ein, so werden, wenn wieder $\alpha = mr - nt$:

$$\begin{aligned} u &= + \frac{\mathfrak{B} n x}{4 \pi} \left\{ - \frac{m^3 \cos^2 \alpha}{r^5} (x^2 + y^2) \right. \\ &+ 2 m^2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{(x^2 + y^2 - z^2)}{r^5} - m \sin^2 \alpha \frac{x^2 + y^2 - 2 z^2}{r^7} \\ &\left. + m \cos^2 \alpha \frac{x^2 + y^2 - 2 z^2}{r^7} - \sin \alpha \cos \alpha \frac{x^2 + y^2 - z^2}{r^5} \right\} \end{aligned}$$

1) Wied. Ann. 36. p. 1. 1889.

$$w = + \frac{\mathfrak{B}^2 n x}{4 \pi} \left\{ \left(- \frac{m^3 \cos^2 \alpha}{r^5} + \frac{3 m^3 \sin \alpha \cos \alpha}{r^6} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2 m \sin^3 \alpha}{r^7} + \frac{2 m \cos^3 \alpha}{r^7} - \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{r^5} \right) (x^2 + y^2) \right\}$$

v erhält man aus u durch Vertauschung von x mit y .

Bilden wir nun wieder das Zeitintegral über eine lange Zeit oder über eine ganze Schwingung, wie in Gleichung (15a), so finden wir

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{T_1} u \, dt &= - \frac{T_1 \mathfrak{B}^2 n m^3 (x^2 + y^2)}{8 \pi r^5} x \\ \int_0^{T_1} v \, dt &= - \frac{T_1 \mathfrak{B}^2 n m^3 (x^2 + y^2)}{8 \pi r^5} y \\ \int_0^{T_1} w \, dt &= - \frac{T_1 \mathfrak{B}^2 n m^3 (x^2 + y^2)}{8 \pi r^5} z. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den (15a) durch das Fehlen des zweiten Gliedes auf der rechten Seite. Dieser Unterschied fällt bei den thatsächlich beobachtbaren Licht- und Wärmestrahlungen fort, weil man nur in Entfernungen beobachten kann, gegen welche die Wellenlänge verschwindet; und in diesem Falle verschwindet in den Gleichungen (15a) das zweite Glied gegen das erste.

Wir können noch weiter den Schluss ziehen, dass bei electromagnetischen Schwingungen stets Strahlung von Energie stattfindet. Die Integrale (20), über eine ganze Schwingung ausgedehnt, geben die thatsächlich fortströmende Energie. Während der Schwingung findet ein abwechselndes Hin- und Herfliessen derselben statt, und der letzte Betrag ist der Ueberschuss der fortströmenden über die zurückfliessende Energie. Wir sehen ferner, dass das Verhältniss der durch Strahlung abgegebenen Energie zum gesammten Energievorrath bei gleichbleibendem \mathfrak{B} abhängt von der Schwingungsdauer und von der Wellenlänge in der Weise, dass die Strahlung bei kürzerer Schwingungsdauer ausserordentlich stark zunimmt.

Ausserdem muss die Strahlung abhängen von dem Mittel, in welchem die Schwingung arbeitet, und zwar muss sie grösser werden, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und somit die Wellenlänge kleiner wird. In Wirklichkeit hat man es nie mit so einfach ablaufenden Vorgängen zu thun, doch wäre es vielleicht von Interesse, die experimentelle Prüfung von Strahlungen verhältnissmässig langsamer Schwingungen vorzunehmen.

Eine graphische Uebersicht über die Anordnung der Kraftlinien um eine electriche Schwingung ist von Hrn. Hertz ¹⁾ gegeben worden. Man sieht daraus, dass bei Schwingungen die Kraftlinien sich von den erregenden Leitersystemen loslösen, in sich selbst zurückkehren und als Complex geschlossener Curven durch den Raum davoneilen. Ein Abströmen der Energie von einer Schwingung ist eine nothwendige Consequenz der Maxwell'schen Theorie. Nach der alten Anschauung würde eine electriche Schwingung, welche isolirt, fern von festen Körpern, im freien Raume arbeitet, keine Energie abgeben können. Die Electrodynamik bewegter Körper ist aus dieser Betrachtung ferngehalten, weil ihre Grundlagen noch keineswegs die Sicherheit der übrigen physikalischen Theorien besitzen, welche wir erörtert haben.²⁾ Ich hoffe, demnächst die Beziehungen dieses hier ausgeschlossenen Gebietes zu den anderen physikalischen Systemen in einer besonderen Arbeit zu behandeln.

§ 5.

Das Entropieprincip.

Wir haben noch die Erscheinungen zu betrachten, bei denen die Bewegungen der Energie vom Entropieprincip geregelt werden. Man kann dieses Princip so aussprechen, dass die Energie bei ungleicher Vertheilung ihrer Dichtigkeit sich immer so bewegt, dass die Unterschiede der Dichtigkeit aufhören.

Es ist vielfach versucht worden, das Princip aus den allgemeinen Gleichungen der Mechanik abzuleiten. Die Untersuchungen beziehen sich hierbei auf den Giltigkeitsbereich, der

1) A. a. O.

2) c. f. Hertz, Wied. Ann. 41. p. 369. 1890.

nach unseren bisherigen Anschauungen immer ein beschränkter ist und auf reine Bewegungsvorgänge angewiesen bleibt.

Den analytischen Ausdruck findet man am leichtesten aus dem Hamilton'schen Princip nach Boltzmann's Vorgang. Es ist

$$o = \delta \int_{t_0}^{t_1} (F - L) dt$$

bei festliegenden Endwerthen der Zeit t_0 und t_1 . Addirt man beiderseits

$$2 \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

und dividirt durch

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt \cdot \int_{t_0}^{t_1} dt,$$

so wird

$$\frac{2 \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt \cdot \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \delta \int_{t_0}^{t_1} (F + L) dt}{\int_{t_0}^{t_1} L dt \cdot \int_{t_0}^{t_1} dt} =$$

Bezeichnet man die mittlere Zufuhr zum Energievorrath infolge der Variation mit δQ

$$\delta Q = \frac{\delta \int_{t_0}^{t_1} (F + L) dt}{\int_{t_0}^{t_1} dt}$$

die mittlere kinetische Energie mit

$$\vartheta = \frac{\int_{t_0}^{t_1} L dt}{\int_{t_0}^{t_1} dt}$$

so wird

$$2 \delta \log \int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{\delta Q}{\vartheta}.$$

Diese Form ist genau die des zweiten Hauptsatzes, wenn man sicher ist, dass die linksstehende Variation ein vollständiges Differential ist.

Nur dann ist

$$\int \frac{dQ}{\vartheta} = o,$$

wenn die Anfangs- und Endlagen des Systems zusammenfallen. Wenn die Bahnen der einzelnen Punkte des Systems geschlossene sind und ganz im endlichen liegen, muss bei cyklischer Variation der Bahnen, sobald man wieder zu den Anfangsbahnen zurückkehrt, auch t_0 und t_1 denselben Punkten derselben entsprechen. Dann muss das Integral Null sein und das Differential ist ein vollständiges. Wenn aber die Bahnen ungeschlossene sind, also entweder sich im unendlichen verlieren oder im endlichen aus unendlich vielen Zweigen bestehen, so sind Variationen der Bahnen denkbar, durch welche man zwar zu denselben Bahnen wieder gelangt, aber in diesen die Zeitpunkte t_0 und t_1 andern Punkten der Bahnen entsprechen. Man kann z. B. wenn eine Bahn aus sich wiederholenden congruenten Zweigen besteht, den Zweig, auf den $t_1 - t_0$ sich bezieht, beim Zurückkehren auf einen andern Zweig fallen lassen, wo dann t_1 , t_0 in Bezug auf das gewählte Coordinatensystem andern Bahnpunkten entsprechen, während das Bahnstück doch dasselbe ist.¹⁾ Man kann demnach das Entropieprinzip mit Sicherheit nur auf in sich zurücklaufende Bewegungen anwenden oder solche, bei denen die thatsächlichen Bewegungen durch Mittelwerthe ausdrückbar sind, die sich auf geschlossene Bahnen beziehen. Es setzt ausserdem noch voraus, dass die Bewegung der Energie nur durch Ausgleichung des integrierenden Nenners ϑ stattfindet. Unter dieselben Gesichtspunkte fallen die monocyclischen Systeme mit rein kinematischen Verbindungen, sobald die wirkenden Kräfte nur vom augenblicklichen Zustande des Systems abhängen. Für diese ist dann die kinetische Energie integrierender Nenner. Dann findet, wie bei der Wärme.

1) Vgl. Boltzmann, Wien. Ber. 11. Jan. 1877.

Bewegung der kinetischen Energie immer dann und nur dann statt, wenn zwei Systeme so mit einander verbunden werden, dass die integrierenden Nenner ungleich sind und zwar ist die Richtung immer von dem grösseren Werthe desselben zum kleineren bestimmt.

Es ist hierdurch die Bewegung der Energie sehr einfach festgelegt, und sie gestaltet sich besonders dadurch einfach, dass es sich nur um kinetische Energie handelt. Es folgt aus den allgemeinen Betrachtungen über monocyclische Systeme ¹⁾, dass das Entropiegesetz auf den Uebertritt kinetischer Energieformen sich beschränken muss.

Es ist hiernach den Bewegungen, welche wir als Wirkung von Fern- und Druckkräften vorstellen, die Stellung klar gelegt: so lange wir den durch diese Kräfte gegebenen Energievorrath betrachten, und von versteckten Energiemengen absehen, wird diese Energie in andere Formen frei verwandelbar sein, sobald wie der Wirkungsweise der Kräfte keine Beschränkungen auflegen. Schwieriger ist es die Vorgänge zu übersehen, bei denen verborgene Bewegungen vorkommen, wie bei den electrischen, magnetischen und chemischen Energieformen. Electrische und magnetische Ladungen, nach Gaussischem Maasse gemessen, ebenso die freie Energie der chemischen Verbindungen sind frei verwandelbare Arbeitsformen. Aber es liegt eine Schwierigkeit in dem Umstande, dass man nicht weiss, wie weit die bei diesen Vorgängen immer auftretenden thermischen Erscheinungen beseitigt werden können, um nicht mehr als *nothwendige* Begleiterscheinungen gelten zu müssen.

Jedenfalls wird man das Entropiegesetz mehr als ein Integralgesetz verwickelter Einzelvorgänge auffassen, deren genaue Beziehungen zu verfolgen die Hilfsmittel unseres Begreifens übersteigt, als ein überall anwendbares Naturprincip.

Es ist nun der Versuch gemacht worden, das Entropieprincip auf alle Energieformen ausdehnen. Man findet für jede ein Maass der Intensität und einen allgemeinen Satz, dass jede Energieform das Bestreben hat, von Stellen höherer Intensität zu solchen geringerer überzugehen. ²⁾ Bei dieser Be-

1) v. Helmholtz, Crelle Journ. 97. p. 111 ff.

2) Helm, Die Lehre der Energie. p. 62. Leipzig 1887.

trachtungsweise hat man aber die Schwierigkeit, in jedem Falle untersuchen zu müssen, wann es der Energie gestattet ist, ihrem Bestreben thatsächlich Folge zu leisten. Für die Erforschung der thatsächlichen Bewegung der Energie müssen jedesmal noch andere Beziehungen aufgefunden werden.

Wir sind bei den Versuchen die Energie zu lokalisiren, auf nichts gestossen, was mit unsern bisherigen Begriffen unvereinbar wäre. Jedenfalls scheint diese Auffassungsweise in vielen Fällen einfachere Vorstellungen zu gestatten, als sie ohne diesen Begriff möglich wären. Welche Bedeutung ihm in der Erkenntnisstheorie zukommt, ist eine andere Frage, welche ausserhalb des Zweckes dieser Untersuchung liegt.

IV
gedie
klein
Lan
tica
war
eine
Lan
gan
mäs
bes
bac
such
Spa
zu
des
läss
bei
in
ges
frei
nun
zwe
zus
den
wic
dan
beie
ma
kon
Die
zu

IV. Ueber die Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in membranösen Körpern; von F. Melde.

(Hierzu Tafel VII Fig. 5—14.)

(Schluss.)

12. Anfangs hatte ich die Einrichtung so getroffen, dass die akustische Latte horizontal auf zwei Stelltischen festgeklemmt wurde. Die Messingklemmen klemmten hiernach die Lamellen so ein, dass diese mit ihrer Breitseite in einer verticalen Ebene lagen, im ganzen aber horizontal ausgespannt waren. Die Spannung wurde hierbei so herausgebracht, dass ich eine Klemme öffnete und hinter ihr ein überstehendes Stück der Lamelle so mit der Hand anzog, dass diese möglichst in ihrer ganzen Breite gleichmässig gespannt wurde. Diese gleichmässige Spannung ist erforderlich und gehört hierzu insbesondere, dass die Lamelle genau senkrecht zu den Klemmbacken eingeklemmt wird. Im Verlaufe der weiteren Untersuchung stellte sich aber die Nothwendigkeit heraus, die Spannung der Lamellen genau angeben zu können und dafür zu sorgen, dass diese Spannung, falls verschiedene Längen desselben Streifens abgegrenzt wurden, dieselbe blieb. Dies lässt sich bekanntermaassen nur so erreichen, wie Weber es bei den Saiten machte. Ich klemmte daher die akustische Latte in genau *senkrechter* Lage an einem starkgebauten Barometergestell fest. Hierdurch kamen die Lamellen in verticaler Lage, frei herunterhängend, zur Abgrenzung, und wurde die Spannung durch eine dritte Klemme k'' (Fig. 10) bewirkt, bei welcher zwei metallene Klemmbacken sich mittelst zweier Schrauben zusammenschrauben liessen, um zwischen sich das untere Ende der Lamelle zu fassen. Da die Klemme hernach, falls Gewichte an sie angehängt werden, nicht schief gezogen werden darf, so wurde dies Schiefziehen dadurch vermieden, dass an *beiden* Klemmbacken unten eine Oese angelöthet war. Zog man durch diese beiden Oesen eine Bindfadenschlinge, so konnten an diese die Spannungsgewichte angehängt werden. Die ganze Einspannung der Lamelle ist aus der Fig. 10 zu erkennen, ohne dass es nöthig wäre noch eine weitere Er-

läuterung hinzuzufügen. Wenn hernach die Spannungen angegeben werden, so sei bemerkt, dass diese in Grammen zu verstehen sind und zwar immer auf ein ganzes Hundert abgerundet. Die geringste Spannung betrug 100 g (Klemme + einem entsprechenden Zulagegewicht), die grösste 2000 g. Dazwischen kommen dann noch Spannungen von 300, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1500 g vor.

Bei Saiten ist es ja bekannt, dass ihre Longitudinaltöne innerhalb weiter Grenzen von der Spannung nur wenig abhängig sind, demgemäss auch innerhalb dieser Grenzen die Schallgeschwindigkeit sich nur sehr wenig ändert. Bei den membranösen Körpern kann jedoch die Spannung eine wesentliche Verschiedenheit der Schallgeschwindigkeit bewirken, insbesondere bei denen der dritten Gruppe.

Von grosser Wichtigkeit ist es noch bei solchen Untersuchungen, wobei das Ohr zu entscheiden hat, die Controle auch in der Weise anzuwenden, dass neben einem Longitudinalton eines soeben untersuchten Streifens der Longitudinalton von einem gleich langen andern Streifen, der bereits früher untersucht war, verglichen wird. Hierbei wird man sofort darüber unterrichtet, ob man sich in der Octave nicht geirrt hat, überhaupt, ob die Bestimmungen der Tonhöhen eine vollkommene Befriedigung gewähren. Denn, wenn man z. B. bei weissem Seidenpapier mit einer Spannung gleich 100 g im Mittel die Schallgeschwindigkeit gleich 1988 m findet und früher für gelbes Atlasband bei einer Spannung von 1000 g diese Geschwindigkeit gleich 2015 m gefunden hat, so muss, wenn man bei den betreffenden Spannungen zwei gleichlange Streifen der genannten Körper nebeneinander zum Tönen bringt, sich vollkommen deutlich erkennen lassen, dass die beiden Longitudinaltöne sehr nahe unisono sind, dass aber doch der Ton des Atlasbandes etwas höher ist wie der vom Seidenpapier. Die betreffenden Intervalle bei solchen Toncontrollen sind gleich dem Verhältniss der Schallgeschwindigkeiten. In diesem Falle war demnach das Intervall gleich $2015/1988 = 1,0139$. Dasselbe konnte natürlich auch aus den entsprechenden Tonhöhen abgeleitet werden. Denn für Atlasband wurde bei $L = 80$ cm die Zunge $a = 14$ gezogen, mithin war $n = 312$; beim Seidenpapier war $a = 13$ mithin $n = 308$. Dass nun diese Zahlen

312
win
für
wied
direc
mun
terv
erst
gefu
best
bere
höhe
schw
199
gleic

Lan
Ich
aku
eine
vers
kehr
welc
betri
quer
Stri
10
und
die
ein
und
1,4
frei
Sch
Mes
für
ebe
der
ach

312 und 308 je mit 4 erst zu multipliciren sind, um auf die wirklichen Tonhöhen N zu kommen, ist ohne Bedeutung. Denn für die Berechnung des Intervalls würde sich die 4 doch wieder wegheben. Es ist demnach das betreffende Intervall direct auch gleich $312/309 = 1,01299$. Völlige Uebereinstimmung der beiden auf verschiedenem Wege so berechneten Intervalle, braucht hier indess nicht einzutreten. Denn das zuerst berechnete Intervall wurde aus den Schallgeschwindigkeiten gefunden und diese waren *Mittelwerthe* aus je drei Einzelbestimmungen bei drei verschiedenen Längen. Das zuletzt berechnete Intervall $321/308$ aber wurde nur aus den Tonhöhen für die Länge gleich 80 cm gefunden. Die Schallgeschwindigkeiten in den beiden Streifen für diese Länge waren 1996,8 und 1971,2, wonach sich das Intervall ebenfalls genau gleich 1,01299 berechnet.

Bezüglich der Abgrenzung einer bestimmten Länge einer Lamelle wurde noch eine grosse Vereinfachung eingeführt. Ich stellte nämlich den oberen Schieber S Fig. 10 auf der akustischen Latte fest und machte längs ihm auf die letztere einen Querstrich. Sodann wurde der untere Schieber so weit verschoben, bis die Entfernung zwischen den einander zugekehrten Rändern der Messingklemmen k und k' Fig. 10, in welchem die Streifen ihre Begrenzung fanden, genau 60 cm betrug. Hierauf wurde auch längs des unteren Schiebers S' quer auf die Latte ein Strich gezogen. Von diesem letzteren Strich an gerechnet, machte ich dann in den Abständen von 10 zu 10 cm längs des unteren Schiebers weiterer Querstriche und schrieb an diese zur Einstellung des unteren Schiebers die Zahlen 60, 70, 80, 90, 100 etc. an. Hiernach leuchtet ein, dass ich sofort die Längen der Lamellen gleich 60, 70 und 80 cm etc. und dementsprechend die Wellenlängen $\lambda = 1,2; 1,4; 1,6$ m etc. hatte, wenn ich, nachdem die Lamelle bei völlig freier Lage, nach Oeffnung der unteren Messingklemme k' den Schieber auf den Strich 60, 80 oder 100 einstellte und je die Messingklemme schloss. So konnte ich in wenigen Minuten für diese drei Längen je die Tonbestimmungen machen und ebenso in wenigen Minuten auch die sehr einfache Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ausführen. Kurz die Beobachtungsmethode war nun so weit ausgebildet, dass sie in keiner

Beziehung irgend eine Schwierigkeit oder Unbequemlichkeit darbot und doch die Bedingung einer raschen und genauen Bestimmung der Tönhöhen erfüllte.

13. Im vorausgehenden wurde verschiedentlich von Toncontrollen gesprochen und angegeben, wie man dabei zu verfahren habe, um sicher zu sein, dass man sich mit dem Ohre nicht getäuscht habe. Im Verlauf der Untersuchung kam ich aber noch auf eine ganz andere Controle, wobei die Verwendung der *Kundt'schen Staubfiguren* die Hauptsache bildete. Wenn es nämlich gelang, mit Hülfe der Longitudinalschwingungen der membranösen Streifen die Luft in einer Glasröhre in eine stehende Wellenbewegung zu versetzen, wenn es gelang, in dieser Glasröhre die Kundt'schen Staubwellen zu erzeugen, so konnte die Wellenlänge λ des Longitudinaltons für die Luft gemessen werden. Da nun die Sache so eingerichtet wurde, dass hierbei die Lamelle wie seither an beiden Enden fest war und mit ihrer Mitte die Schallerregung im Luftrohr besorgte, so war auch jetzt die Länge L der Lamelle gleich der halben Wellenlänge für den Ton. Da man ferner die Schallgeschwindigkeit in der Luft kennt und zunächst einmal bei einer Temperatur von $+18^{\circ}\text{C.}$ gleich 344 m setzen kann, so folgt aus der einfachen Gleichung

$$(a) \quad \lambda^* \cdot N = 344,$$

dass man die Schwingungszahl N als

$$(a^*) \quad N = \frac{344}{\lambda^*}$$

erhält und somit im Stande ist, diese Schwingungszahl *ohne Hülfe des Ohres* zu bestimmen. Ferner ergibt sich aus einer zweiten Gleichung für den Streifen

$$(b) \quad \lambda \cdot N = v,$$

welche Gleichung in die Gleichung (a) dividirt liefert

$$\frac{\lambda^*}{\lambda} = \frac{344}{v},$$

woraus dann

$$(c) \quad v = 344 \cdot \frac{\lambda}{\lambda^*}$$

oder, falls man die Schallgeschwindigkeit im Luftrohr mit λ bezeichnet,

$$(d) \quad v = \frac{\lambda}{\lambda^*}$$

gefunden werden kann.

Es wäre dies dieselbe Methode, welche Kundt anwandte, um die *relativen* Schallgeschwindigkeiten für feste Körper mittelst seiner Staubfiguren zu bestimmen. Kundt kam indess, da er nur relative Bestimmungen von Schallgeschwindigkeiten machte, mit all den Schwierigkeiten, denen man nothwendig begegnet, falls *absolute* Bestimmungen gemacht werden sollen, nicht in Verbindung. Aber es gestatten desshalb auch solche relative Bestimmungen noch nicht die etwa verlangten Werthe für die wirklichen absoluten Geschwindigkeiten genau anzugeben. Denn wenn z. B. von Kundt gefunden wurde, dass die Schallgeschwindigkeit von Messing im Vergleich zu der in der Luft gleich 10,87 war und von ihm der Werth der Schallgeschwindigkeit, in der freien Luft für 0° C. gleich 332,8 m angenommen wurde, so ist dies letztere ein Werth, welcher selbst bei einer 55 mm weiten Röhre streng genommen nicht derselbe bleibt, wie in freier Luft. Würde er aber für die Röhre nur um vier Zehntel geringer und somit gleich 332,4 angenommen, so lässt sich sofort berechnen, dass hiernach die *absolute* Schallgeschwindigkeit in Messing um 4,4 m geringer gefunden wird.

Die Anwendung der Gleichungen (c) und (d) hatte für mich bei meiner Untersuchung keine Bedeutung, denn wir werden uns bald überzeugen, dass Streifen nicht so wie Stäbe verwendet werden können, um die Kundt'schen Figuren zu *scharfen* Messungen der Schallgeschwindigkeiten in den Streifen auszunutzen. Für mich hatte nur die Gleichung (a) und (a*) Bedeutung. Mit ihr konnte ich auf einem neuen Wege, *ohne das Ohr zu fragen*, die Octave des Longitudinaltons N gegenüber dem Transversalton n des Sonometers bestimmen. Denn wiewohl ich mich nach den vielfachen, im vorausgehenden besprochenen Toncontrollen, die mit dem Ohre ausgeführt wurden, für meinen Theil in vollkommener Sicherheit befand, so wäre doch ein Bedenken, welches von einer anderen Seite, namentlich einer solchen, welcher kein gutes Gehör zu Gebote steht, geäußert würde, nicht gerade ohne weiteres abzuweisen. Die neue Controle wird demnach jeden Zweifel, auch von solcher Seite geäußert, vollkommen beseitigen.

14. Wie liessen sich nun die Kundt'schen Figuren durch Streifen erzeugen? Diese Sache hat mir viel Schwierigkeiten bereitet, aber schliesslich gelangte ich doch in erfreulicher

Weise zum erwünschten Ziel. Die Fig. 11 zeigt den Weg, den ich zuerst einschlug. RR ist das Glasrohr, in welchem die Staubwellen erzeugt wurden. Am linken Ende desselben bedeutet q einen dicken Gummistopfen, der mittelst einer Laubsäge, von rechts nach links gerechnet, bis zur Mitte hin einen Vertical-Längsschnitt erhalten hat. In diesen wird das linke Ende des Streifens ss' eingeklemmt, das nun, falls der Stopfen fest ins Glasrohr eingesetzt wird, beim Anziehen des Streifens so fest in jenem haftet, wie es bei einer wirklichen Einklemmung in einer Metallklemme kaum fester halten kann. Der Gummistopfen spielt nämlich hier eine ähnliche Rolle wie eine Stopfbüchse, denn wie diese um so fester schliesst, je stärker die Druckkräfte wirken, um so stärker pressen sich auch die rechten Hälften des Stopfens zusammen, je stärker an der Lamelle gezogen wird.

Nun muss aber etwa in der Mitte des Streifens ein Stempelchen p angebracht werden. Dasselbe muss möglichst leicht sein und bestand bei meinen Versuchen aus Kork. Zu seiner Herstellung wurde von gutem Kork ein etwa 4 mm hohes Stück abgeschnitten. Dann wurde dieses Stück mit der Laubsäge genau in der Richtung eines Durchmessers in zwei Hälften zersägt. Dann wurde jedes dieser halbkreisförmigen Stücke mittelst einer feinen Feile an der Diameterseite auf eine bestimmte Strecke ein wenig ausgefeilt, sodass beim Wiederzusammensetzen der Stopfen so wie in Fig. 12 dargestellt aussieht, indem er durch das Anfeilen in der Mitte den schmalen Schlitz $\mu\mu'$ bekommen hat, durch welchen hernach, wie zu erwarten, der Streifen durchgesteckt werden soll. Bevor dies aber möglich wird, müssen die beiden Hälften des Stopfens erst wieder fest zu einem Ganzen vereinigt werden. Ich machte es so, dass ich um den äusseren Kreisrand einen schmalen Streifen Papier, mit Leim bestrichen, umlegte, welcher Streifen wie ein Ring die beiden Hälften des Korkstempelchens fest umschloss. Hierbei konnte auch erreicht werden, dass der Korkstempel am rechten Ende des Glasrohres dieses entsprechend abschloss, denn es ist hierbei unbedingt nöthig, dass nicht etwa zu viel Reibung eintritt, aber auch nicht zu viel Spielraum zwischen dem Stempel und der Glaswand verbleibt. Indem man den Papierstreifen, der um den Stempel herum-

geht, entsprechend in seiner Länge verkürzt, lässt sich dieser richtige Abschluss des Luftrohres erreichen. Das Ende der Lamelle, welches durch den Schlitz des Stempelchens hindurchgehen soll, muss dies thun, ohne dass letzterem Gewalt angethan wird. Das Stempelchen wird sodann nach links verschoben und, nachdem es etwa 3 mm ins rechte Ende der Glasröhre eingeschoben ist, mit ein wenig heissem Wachs-Calophoniumkitt an der Lamelle *ss'* befestigt. Ist der Schlitz im Stempelchen vielleicht ein bischen zu weit gerathen, so schadet dies nichts, denn es lässt sich eben mittelst des Kittes an ihm und dem Streifen der Luftabschluss des Luftrohres nach aussen vervollständigen. Es versteht sich von selbst, dass die Röhre auf der akustischen Latte solid befestigt werden muss und ebenso die Klemme *k* entsprechend befestigt wird. Ersteres wurde so bewirkt, dass die Röhre durch das Mittelloch *y* des linken Schiebers *S*, Fig. 9a, gesteckt wurde und noch dazu vor oder hinter diesem Schieber durch einen Kork eine weitere Unterstützung auf der Latte bekam. Die Befestigung der Klemme *k*, Fig. 11, geschah so, dass eine der beiden Messingklemmen an einem Schieber, z. B. von der Stelle *k'*, Fig. 9a, losgeschraubt und statt dessen vor dem kreisrunden Mittelloch, Fig. 9a, dieses Schiebers festgeschraubt wurde, sodass die Lamelle nunmehr centrisch durch dieses Loch *y* hindurchgezogen und sodann festgeklemt werden konnte. Durch entsprechende feinere Regulirungen in der Lage der Röhre und der Einklemmung der Lamelle lässt sich dann erzielen, dass beim Anstreichen der letzteren an der Stelle *α*, Fig. 11, ein möglichst regelmässiger Longitudinalton erhalten wird.

Das Einbringen des Korkfeilichts in die Luftröhre geschieht an der linken Seite derselben, indem zunächst, Fig. 11, die Klemme *k* geöffnet, dann der Stopfen *q* aus der Röhre herausgezogen und dann eine entsprechende Menge des Korkfeilichts links in die Röhre gebracht wird. Nachdem der Stopfen *q* wieder eingesetzt worden ist, hebt man die Latte sammt allem, was auf ihr befestigt ist, auf und sucht durch Schiefhalten derselben und Klopfen auf dieselbe das Pulver möglichst regelmässig in der Röhre zu vertheilen. Wird die Lamelle dann wieder gespannt und angestrichen, so wird man beim regelmässigen Tönen der Lamelle auch regelmässige Staubfiguren erhalten.

15. Nehmen wir an, das Luftrohr wäre etwa 1 m lang gewesen, so müsste die Lamelle nahezu 2 m lang sein, wenn die ganze Zusammenstellung der Fig. 11 gewahrt bleiben sollte. Geben wir zu, dass ein so langer Streifen von einem Körper, dessen Schallgeschwindigkeit z. B. gleich 2000 m ist, wirklich zu verwenden war, so ist die Schwingungszahl für den Grundton des Streifens gleich

$$N = \frac{2000}{2 \cdot 2} = 500.$$

Setzen wir die Schallgeschwindigkeit in der Röhre bei einer Temperatur gleich 18° C., rund gerechnet gleich 344 m, so würde die Länge λ der Luftwelle gleich

$$\lambda^* = \frac{344}{500} = 0,688 \text{ m} = 688 \text{ mm},$$

d. h. die Halbwelle gleich $\lambda^*/2 = 344 \text{ mm}$ sein. Hieraus ergibt sich, dass im Luftrohr, dessen Länge 1 m ist, nur etwa zwei Halbwellen sich deutlich ausbilden können, falls überhaupt diese Ausbildung deutlich erfolgt. Solche Halbwellen von 344 mm Länge lassen sich aber ihrer Länge nach nicht gerade mit grosser Genauigkeit bestimmen, falls nicht eine grössere Zahl vorhanden ist, aus deren Gesamtlänge hernach durch Division in die Anzahl der Halbwellen ein genauerer Mittelwerth abgeleitet werden kann, oder besser, aus deren Einzelwerthen nach einer bestimmten Methode¹⁾ ein solcher genauerer Werth abzuleiten ist. Es war demgemäss nöthig, mehr Halbwellen im Luftrohr zu bekommen. Aber soweit unsere jetzige Einrichtung in Betracht kommt, lässt sich dies nicht erzielen. Denn wollten wir das Rohr länger nehmen, so müsste im selben Verhältniss auch der tönende Streifen länger genommen werden. Es würde aber hiermit der Ton des Streifens im Verhältniss der Verlängerung tiefer und hiermit die Länge einer Halb- oder Ganzwelle im Luftrohr auch entsprechend grösser werden. Die Zahl der Wellen würde demnach im Rohre dieselbe bleiben. Dasselbe würde bei einer Verkürzung des Luftrohres und einer gleichen Verkürzung des tönenden Streifens eintreten.

Es gibt jedoch zwei Mittel, um das Erwünschte zu er-

1) Pogg. Ann. 135. p. 357 ff.

reichen. Das eine Mittel ist das, dass man nicht den Longitudinal-Grundton, sondern den zweiten Oberton des Streifens verwendet, bei welchem Tone wir ein $N = 1000$ anstatt wie vorhin $N = 500$ erhalten hätten. Die Einrichtung müsste dann so wie die Fig. 13 versinnlicht, getroffen werden. In ihr bedeutet jetzt wie früher ss' die Länge des Streifens, also gemäss der früheren Annahme seine Länge gleich 2 m. Die Röhre soll aber um ihre Hälfte verlängert werden und somit 1,5 m lang sein, demgemäss sie jetzt die Strecke RR' einnimmt. Lassen wir den Streifen den zweiten Oberton geben, so liegt bei ihm ein Knoten in n und zwei Schwingungsmaxima in m und bei p . Bringen wir demgemäss jetzt bei p das Korkstempelchen an, so werden beim Anstreichen Halbwellen gleich $344/2 = 172$ mm herauskommen, so, dass auf die Länge des Glasrohres acht Halbwellen kämen, von denen, wenn wir diejenigen an den Enden des Rohres weglassen, doch wohl sechs für eine genauere Bestimmung der Wellenlänge zur Verfügung stehen können.

Diesen hier bezeichneten Weg habe ich jedoch nicht weiter verfolgt, denn da die Streifentöne des zweiten Obertons schwieriger herauszubringen sind, so werden sie nicht intensiv und regelmässig genug, um hinreichend starke Lufterschütterungen im Rohre zu erzeugen. Ich wendete vielmehr eine ganz andere Methode an, um zum Ziel zu gelangen und habe ich dieselbe in der Fig. 14 versinnlicht. In ihr bedeutet RR' wieder das Glasrohr. Aber jetzt wird bei ihm der Tonstreifen nicht in q befestigt, sondern es wird durch ein centriscch gebohrtes Loch des Gummistopfens q hindurch zunächst ein langer Messingdraht r gesteckt. Derselbe trägt am rechten Ende eine kleine Messingklemme, und in dieser wird erst das linke Ende s des Tonstreifens mittelst zweier kleinen Schraubchen eingeklemmt, während das rechte Ende wie vorhin in k festgeklemmt wird. Damit der Messingdraht r durch seine Schwere sich rechts in der Glasröhre nicht herunter senken kann, wodurch eine centrale Anordnung des Streifens und des Korkstempelchens bei p unmöglich würde, ist an rr bei t ein kleines Messingfüsschen angelöthet, sodass nunmehr der Draht rr horizontal liegen bleiben muss. Hat man demnach nur hinreichend lange Röhren, so kann die Zahl der Halbwellen in ihnen vollkommen ge-

nügend vermehrt werden. In dem Falle, welcher im nächsten Abschnitte erläutert werden soll, waren die betreffenden Dimensionen der ganzen Einrichtung folgende: Länge des Glasrohres 1270 mm, Durchmesser desselben im Lichten 28 mm, Länge des Messingdrahtes rr incl. der kleinen Messingklemme 1140 mm, Dimensionen der kleinen Messingklemme gleich 19/21 mm. Da nun die Länge des zum Tönen verwendeten Streifens ss' gleich 800 mm, mithin die Strecke desselben im Glasrohr gleich 400 mm war, so ragte vom Messingdraht rr , vom rechten Ende von q an gerechnet, ein Stück gleich $1140 - 400 = 740$ mm, die kleine Klemme mit gerechnet, ins Glasrohr hinein.

16. Bevor ich aber die weiteren Ergebnisse meines zunächst hier in Betracht kommenden Versuches mittheile, muss erst noch ein anderer wichtiger Umstand erörtert werden. Verwendet man nämlich Glasröhren und Glasstäbe, oder Metallstäbe und Metallröhren bezw. auch Holzstäbe, so wird die Hinzufügung eines Stempelchens von Kork am einen Ende dieser tönenden Körper den Longitudinalton derselben nicht wesentlich ändern. Immerhin aber müsste die Tonhöhenänderung beachtet werden, wenn man die Kundt'schen Figuren zur Messung von *absoluten* Schallgeschwindigkeiten benutzen wollte. Denn, wenn die Tonhöhenänderung N beträgt, so ist die Schwingungszahl des Tons vom Klangstab nicht wie beim unbelasteten Stab N sondern $N - \Delta N$. d. h. der belastete Stab wirkt so wie ein unbelasteter Stab von der Länge $L + \Delta L$ wirken würde, wenn er mit einem Stempelchen *ohne Masse* die Luft im Glasrohr erschüttern könnte. Hieraus ergibt sich mit Evidenz, dass auch sogar bei relativen Messungen von Schallgeschwindigkeiten bei der Berechnung nicht ohne weiteres die factischen Längen der Klangstäbe verwendet werden dürfen, sondern die, welche erst nach der Berücksichtigung der Tonvertiefung durch die Belastung der Stempelchen sich berechnen lassen. Nehmen wir z. B. zwei Stäbe: den einen von *Glas*, den anderen von *Messing*, beide der Einfachheit halber gleich lang und beide nacheinander mit demselben Stempelchen versehen, so leuchtet ein, wenn die Stäbe z. B. auch denselben Durchmesser haben, dass das Stempelchen der weit grösseren Masse des Metallstabs gegenüber wohl wenig Einfluss auf die Tonhöhe dieses Stabes ausüben wird. Aber auch dies zuge-

geben, bliebe vielleicht doch der Einfluss beim Glasstab bestehen. Sind demnach nun die Tonhöhenvertiefungen für die beiden Stäbe $\Delta N'$ und $\Delta N''$, so sind die ihnen entsprechenden Längen der Klangstäbe welche *ohne Belastung* die Töne $(N' - \Delta N')$ und $(N'' - \Delta N'')$ liefern würden, beide nicht L sondern beim Glasstab $(L + \Delta L')$ und beim Messingstab $(L + \Delta L'')$. Findet man nun bei der Messung der Staubwellen für Luft im Glasrohr die entsprechenden Wellenlängen gleich λ^* und λ^{**} , so ist das Verhältniss der Schallgeschwindigkeiten für Glas zu Messung nicht gleich λ^{**} / λ^* sondern es müssen hier genauere Gleichungen zur Anwendung kommen, welche, wenn die Schallgeschwindigkeit für Luft im Glasrohr mit v , die für Glas mit v' und für Messing mit v'' bezeichnet wird, lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} (N' - \Delta N') \lambda^* &= v & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} & \text{Für Luft und den} \\ 2(N' - \Delta N')(L + \Delta L') &= v' & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} & \text{Glasstab.} \\ (N'' - \Delta N'') \lambda^{**} &= v & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} & \text{Für Luft und den} \\ 2(N'' - \Delta N'')(L + \Delta L'') &= v'' & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} & \text{Messingstab.} \end{aligned}$$

Demgemäss ergibt sich:

$$\frac{v}{v'} = \frac{\lambda^*}{2(L + \Delta L')}$$

$$\frac{v}{v''} = \frac{\lambda^{**}}{2(L + \Delta L'')}$$

mithin

$$\frac{v'}{v''} = \frac{\lambda^{**} \cdot (L + \Delta L')}{\lambda^* \cdot (L + \Delta L'')}.$$

Die in Klammern stehenden Werthe stellen demgemäss die Correctionsfactoren vor, mit denen die im Luftrohr gemessenen Wellenlängen λ^* und λ^{**} zu multipliciren sind. Zur Berechnung der Werthe $(L + \Delta L')$ und $(L + \Delta L'')$ führen aber offenbar die Gleichungen:

$$\frac{N'}{(N' - \Delta N')} = \frac{(L + \Delta L')}{L}$$

und

$$\frac{N''}{(N'' - \Delta N'')} = \frac{(L + \Delta L'')}{L}.$$

Demgemäss

$$\frac{(L + \Delta L')}{(L + \Delta L'')} = \frac{N' (N'' - \Delta N'')}{N'' (N' - \Delta N')}$$

zu setzen ist. Die verbesserte Gleichung für die relativen

Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im Anschluss an die zunächst aus der Beobachtung erhaltenen Tonhöhen lautet demnach:

$$\frac{v'}{v''} = \frac{\lambda^{**}}{\lambda^*} \cdot \frac{N' (N'' - \Delta N'')}{N'' (N' - \Delta N')}.$$

Ein Beispiel mag diese Sache einmal erläutern. Ich nahm einen Glasstab von 5,6 mm und einen Messingstab von 6,0 mm Durchmesser. Beide Stäbe hatten dieselbe Länge nämlich 1,570 m. Diese Stäbe erhielten beide denselben Korkstempel aufgesteckt, der bei einer Dicke von 4 mm einen Durchmesser von 27 mm besass. Beide Stäbe lieferten beim Anstreichen und Ertönen ihres Grundtons sehr schöne Staubwellen und zwar waren für den Glasstab $7 \cdot \lambda^* / 2 = 722$ mm und für den Messingstab $5 \cdot \lambda^{**} = 773$ mm. Es war mithin $\lambda^* = 206,29$ und $\lambda^{**} = 309,2$ und somit ohne Rücksicht auf eine etwaige Tonhöhenveränderung durch den Stempel

$$\frac{v'}{v''} = \frac{\lambda^{**}}{\lambda^*} = \frac{309,20}{204,29} = 1,4988.$$

Die Tonhöhenmessung ergab für den Glasstab *ohne* Stempel eine Oberoctave von der Zunge Nr. 41,5 mithin von $n = 422$; ferner für den Glasstab *mit* Stempel in derselben Oberoctave aber von Nr. 40 mithin von $n = 416$. Beim Messingstab liess sich ein Unterschied bei Belastung und ohne Belastung nicht erkennen und war der Ton dieselbe Oberoctave von Nr. 4 mithin von $n = 272$. Es war somit $\Delta n = \Delta N'' = 0$ und für den Glasstab $\Delta n' = 6$. Da die Ordnungszahl der Oberoctave für beide Töne dieselbe war, so brauchte ich nicht erst N', N'' und $\Delta N'$ zu berechnen, sondern konnte unmittelbar $\Delta N' = \Delta n' = 6$ und ebenso $N' = 422$ und $N'' = 272$ setzen. Der Correctionsfactor an λ^{**} / λ^* wird demnach

$$\frac{422 \cdot 272}{272 \cdot 416} = 1,0144$$

und wird hiernach v' / v'' nicht gleich 1,4988 sondern gleich 1,5204 gefunden. Man sieht sofort, dass hier Umstände eintreten können, welche eine Rücksicht auf den Einfluss der Belastung durch den Stempel unbedingt erheischen, namentlich wenn vielleicht gar schwerere Stempel von Hartgummi verwendet werden.

17. Hiernach wird man klar erkennen, dass wenn wir zur Erzeugung von Kundt'schen Figuren etwa Saiten oder

unsere membranösen Streifen verwenden, die Frage nach der Vertiefung des Tons, veranlasst durch den stossenden Stempel, und nach dem Einfluss dieser Vertiefung auf die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in den betreffenden Medien von besonderer Bedeutung ist. Die nächsten Auseinandersetzungen werden dies noch weiter bestätigen.

Die Erzeugung der Kundt'schen Staubfiguren nach der durch den Apparat der Fig. 14 erläuterten Methode geschah mittelst eines Streifens von weissem starken Ellenpapier, dessen Dicke gleich 0,202 mm war. Die Länge dieses Streifens war 80 cm, mithin die Wellenlänge des Tons gleich 1,6 m. *Ohne Belastung* gab dieser Streifen folgende Werthe:

$$a = 20; n = 336;$$

$$(v) = 1,6 \cdot 336 = 537,6; v = 4(v') = 2150.$$

Mit *Belastung* ergab sich:

$$a = 0; n = 256.$$

Demgemäss hat das Korkstempelchen bezüglich der Tonhöhenänderung so gewirkt als hätten wir anstatt des in der Mitte belasteten Streifens einen solchen *ohne* Belastung aber von der Länge:

$$(L) = L \cdot \frac{336}{256} = 1,313 \cdot L = 105,04 \text{ cm}$$

für den also $(\lambda) = 210,08 \text{ cm} = 2,101 \text{ m}$ gewesen wäre. Die Tonhöhe (n) für diesen Streifen ist offenbar zu berechnen aus der Proportion:

$$\frac{336}{(n)} = \frac{2,101}{1,600} \text{ mithin } (n) = \frac{1,6 \cdot 336}{2,101},$$

woraus durch Multiplication mit $(\lambda) = 2,101$ selbstverständlich (v) und v wieder ebenso erhalten werden, wie bei der Lamelle von 80 cm.

Der Ton bei der unbelasteten Lamelle verhielt sich zum Tone der belasteten wie $336 / 256 = 1,313$ d. h. Das Intervall war nahezu eine Quarte. *Die beiden Töne gehörten mit Evidenz derselben Octave an.* Die Frage war nun weiter: *welcher Octave?*

Zunächst sei bemerkt, dass die vorausgehende Feststellung der Tonvertiefung durch den Stempel an dem in verticaler Lage frei herunter hängenden und eingeklemmten Streifen bei einer Spannung von 800 g vorgenommen wurde. Ich musste

nämlich erst durch einen genauen Vorversuch, ohne dass der Streifen der Fig. 14 entsprechend in *horizontaler* Lage und zur Hälfte in dem Glasrohr RR' zur Verwendung kam, über die Tonveränderung unterrichtet sein. Hierbei sei weiter bemerkt, dass es bei dieser Prüfung nicht nöthig ist, das Korkstempelchen, falls der Streifen ohne Belastung schwingen soll, ganz von dem Letzteren zu entfernen. Es genügt vielmehr, das Stempelchen nur von der Mitte aus möglichst an ein festes Ende des Streifens hinzurücken.

Nunmehr wurde der Versuch mit Glasrohr und Streifen in horizontaler Lage eingerichtet. Da hierbei die Längenverhältnisse nicht genau so wie vorhin verbleiben konnten, weil das Stempelchen jetzt nicht im freien Zustand, sondern vorn ins rechte Ende der Röhre RR' Fig. 14 eingestellt werden musste, und auch die Spannung jetzt durch Anziehen mit der Hand gemacht werden musste, so war es nöthig, die Tonhöhenbestimmung genau *diesen* Verhältnissen entsprechend zu wiederholen. Der belastete Streifen lieferte bei einer Länge = 81,7 cm = 0,817 m folgendes:

$$a = 62; n = 504.$$

Nun aber die Hauptsache. Es entstanden hierbei im Glasrohr sehr schöne Staubwellen und konnte sofort festgestellt werden, dass für die *Luft*

$$4 \cdot \frac{\lambda^*}{2} = 692; \lambda^* = 346 \text{ mm}$$

war, mithin dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die Luft zunächst

$$(v^*) = 504 \cdot 0,346 = 174,4 \text{ m}$$

gefunden wurde. Um aber auf die wirkliche Schallgeschwindigkeit in der Luft zu kommen, musste dieses $(v^*) = 174,4$ nothwendig mit 2 multiplicirt werden, um

$$v^* = 348,8 \text{ m}$$

zu erhalten. Dies wird aber nur zu erreichen sein, wenn angenommen wird, dass unser $n = 504$ Schwingungen, um auf den Longitudinalton N des Streifens zu kommen, in der nächst höheren Octave zu nehmen ist.

Es ist hiermit aber der unumstössliche Beweis geliefert, dass ich mit meiner Annahme, es sei der Streifton die 1. Oberoctave

von Nr. $a = 62$ des Sonometers mit dem Ohr vollkommen richtig entschieden hatte. Hiermit ist aber auch der Beweis geliefert, dass für die Töne aller anderen Streifen, wobei fortwährend Toncontrollen, namentlich von Streifen-Tönen nebeneinander vorgenommen wurden, die entsprechenden Annahmen über die Ordnungszahlen der Ober- bzw. Unteroctaven vollkommen richtig waren.

Ich glaube hiermit Methoden der Beobachtung und Feststellung von Tönen dargestellt zu haben, welche mehrfach auch sonst in der Akustik zur Verwendung kommen können, um Fragen zu entscheiden, an deren Lösung man bis jetzt vorüber gegangen ist.

18. Ich wende mich jetzt zur Mittheilung meiner factisch gefundenen Werthe von Schallgeschwindigkeiten bei einer grossen Anzahl von membranösen Köpern, indem ich diese Beobachtungswerthe und Schlussberechnungen je in einer Tabelle zusammenstelle. In einer solchen enthält die 1. Columnne die Bezeichnung des betreffenden Körpers; die 2. Columnne die Spannung in Grammen angegeben; die 3. Columnne enthält die doppelte Länge der Streifen, welche zum Tönen gebracht wurden, nämlich doppelt desswegen, weil $2L = \lambda$ die Wellenlänge des betreffenden Tons bedeutet; die 4. Columnne enthält das a d. h. die Nummer der Zunge mit welcher der Streifenton eine bestimmte Octave bildete; die 5. Columnne enthält die Schwingungszahl n der No. a ; die 6. Columnne enthält den Werth von (v) d. h. die vorläufig mit λ und n berechnete Schallgeschwindigkeit; die 7. Columnne enthält die Grösse 2^k , wobei unter k die Ordnungszahl der Octave zu verstehen ist, welche der Streifenton N mit dem Sonometerton n bildete. Für $k = 0$ bestand demgemäss Einklang, für $k = 1$ bildete der Streifenton die 1. Oberoctave vom Sonometerton d. h. n musste mit $2^1 = 2$ multiplicirt werden, welche Multiplication aber auch erst später mit dem (v) vorgenommen werden kann. Geschieht dies aber, so kommt man zur Hauptcolumnne 8, welche die Werthe der wirklich festgestellten Schallgeschwindigkeit v enthält. Die Columnne 9 endlich enthält die Mittelwerthe der Einzelwerthe v der 8. Columnne. In der Columnne 10 finden sich Bemerkungen über die Art der Töne insbesondere auch darüber, ob sie schwierig herauszubringen waren, ob sie möglichst rein u. s. w. waren und welche Controllen stattfanden.

Erste Gruppe.

Körper	Spannung	λ	a	n	$(r) = n \cdot \lambda$	$2k$	r	Mittel	Bemerkungen
1. Gelbes Seidenpapier	300	1,2	6	280	336,0	8	2688	2705	Ton schwach ab rein.
	300	1,6	43	428	684,8	4	2739		
	300	2,0	20	336	672,0	4	2688		
" "	100	1,2	1	260	312,0	8	2496	2522	
	100	1,6	34	392	627,2	4	2509		
	100	2,0	16	320	640,0	4	2560		
2. Weisses Seidenpapier	100	1,2	40	416	499,2	4	1997	1989	Die Controle Nr. 24 bei 1000 Span. stimmte.
	100	1,6	13	308	492,8	4	1971		
	100	2,0	61	500	1000,0	2	2000		
3. Weisses Ellenpapier	800	1,2	47	444	532,8	4	2131	2136	Schöne deutliche Töne. Controle mit Nr. 10.
	800	1,6	20	336	537,6	4	2150		
	800	2,0	2,5	266	532,0	4	2128		
4. Feines Schreibpapier	900	1,2	45	436	523,2	4	2093	2107	
	900	1,6	18	328	524,8	4	2099		
	900	2,0	2,5	266	532,0	4	2128		
5. Zeichenpapier sog. Whatman	1000	1,2	48	448	537,6	4	2150	2153	Ein sehr regelmässiger Körper
	1000	1,6	20	336	537,6	4	2150		
	1000	1,8	11	300	540,0	4	2160		
6. Weisses Conceptpapier	600	1,2	45	436	523,2	4	2093	2087	
	600	1,6	17	324	518,4	4	2073		
	600	2,0	1,2	262	524,0	4	2096		
7. Dicker weisser Löschcarton	500	1,2	22	344	412,8	4	1651	1627	Controle mit Nr. 23 bei 1500 Spannung.
	500	1,6	62	504	806,4	2	1613		
	500	2,0	37	404	808,0	2	1616		
8. Strohpapier	500	1,2	22	344	412,8	4	1651	1617	
	500	1,6	61	500	800,0	2	1600		
	500	2,0	36	400	800,0	2	1600		
9. Durchweg mattgrün gefärbtes Papier	500	1,2	45	436	523,2	4	2093	2101	Controle mit Nr. 3.
	500	1,6	18	328	524,2	4	2099		
	500	2,0	2	264	528,0	4	2112		

Zweite Gruppe.

Körper	Spannung	λ	a	n	$(r) = n \cdot \lambda$	$2k$	r	Mittel	Bemerkungen
10. Dünnes weisses Pergamentpapier	700	1,2	52	464	556,8	4	2227	2198	
	700	1,6	21	340	544,0	4	2176		
	700	2,0	4,5	274	548,0	4	2192		
11. Rothess dickes Pergamentpapier	900	1,2	58	488	585,6	4	2342	2339	Töne rein und stark.
	900	1,6	28	368	588,8	4	2355		
	900	2,0	8,5	290	580,0	4	2320		
12. Dünnes durchsichtiges Pauspapier	700	1,2	55	476	571,2	4	2285	2278	
	700	1,6	25	356	569,6	4	2278		
	700	2,0	7	284	568,0	4	2272		

Körper	Spannung	λ	a	n	$(v)=n \cdot \lambda$	$2k$	v	Mittel	Bemerkungen
1. Einseitig schwarzes Buntpapier (Satine)	600	1,2	38	408	489,6	4	1958	1962	Controle mit Nr. 11
	600	1,6	12	304	486,4	4	1945		
	600	2,0	60	496	992,0	2	1984		
4. Einseit. roth farb. Buntpapier	600	1,2	58	488	585,6	4	2342	2339	Controle mit Nr. 11
	600	1,6	28	368	588,8	4	2355		
	600	2,0	8,5	290	580,0	4	2320		
3. Sogen. Silberpapier	600	1,2	3	268	321,6	8	2573	2575	Controle mit Nr. 1
	600	1,6	36	400	640,0	4	2560		
	600	1,8	26	360	648,0	4	2592		
16. Oelcarton gelb gefärbt	1500	1,2	60	496	595,2	4	2381	2368	
	1500	1,6	28	368	588,8	4	2355		
	1500	2,0	10	296	592,0	4	2368		
7. Starker Oelcarton	1000	1,2	51	360	552,0	4	2208	2187	
	1000	1,6	21	340	544,0	4	5176		
	1000	2,0	4	272	544,0	4	2176		
18. Dünnes Wachspapier	500	1,2	53	468	561,6	4	2246	2255	Controle mit Nr. 12
	500	1,6	25	356	569,6	4	2278		
	500	2,0	6	280	560,0	4	2240		
9. Schwarzes einseit. Copirpapier	500	1,2	19	332	398,4	4	1594	1579	
	500	1,6	59	492	787,2	2	1574		
	500	2,0	34	392	784,0	2	1568		
8. Schwarzes zweiseit. Copirpapier	500	1,2	10	296	355,2	4	1421	1417	Controle mit Nr. 23 bei 1500 g Spannung
	500	1,6	47	444	710,4	2	1421		
	500	2,0	24	352	704,0	2	1408		

Dritte Gruppe.

Körper	Spannung	λ	a	n	$(v)=n \cdot \lambda$	$2k$	v	Mittel	Bemerkungen
2. Leinene Schnur	2000	1,2	39	412	494,4	4	1977	1942	
	2000	1,6	12	304	486,4	4	1945		
	2000	2,0	55	476	952,0	2	1904		
Leinene Schnur	1000	1,2	30	376	451,2	4	1805	1815	
	1000	1,6	7	284	454,4	4	1817		
	1000	2,0	50	456	912,0	2	1824		
Baumwollenschnur	1500	1,2	12	304	364,8	4	1459	1425	
	1500	1,6	46	440	704,0	2	1408		
	1500	2,0	24	352	704,0	2	1408		
Baumwollenschnur	1000	1,2	64	512	614,4	2	1229	1260	
	1000	1,6	34	392	627,2	2	1254		
	1000	2,0	17	324	648,0	2	1296		
4. Gelbes Atlasband	1000	1,2	41	420	504,0	4	2016	2015	Töne schön und rein
	1000	1,6	14	312	499,2	4	1997		
	1000	2,0	63	508	1016,0	2	2032		

Körper	Spannung	λ	a	n	$(v) = n \cdot \lambda$	$2k$	v	Mittel	Bemerkungen
Gelbes Atlasband	500	1,2	36	400	480,0	4	1920	1925	
	500	1,6	11	300	480,0	4	1920		
	500	2,0	57	484	968,0	2	1936		
25. Dreifarbiges seidenes schmales Ripsband	1000	1,2	33	388	465,6	2	931	953	
	1000	1,6	11	300	480,0	2	960		
	1000	2,0	57	484	968,0	1	968		
Dreifarbigen seidenes schmales Ripsband	500	1,2	16	320	384,0	2	768	758	
	500	1,6	55	476	761,6	1	762		
	500	2,0	29	372	744,0	1	744		
26. Einfarb. schmales rothes Seidenripsband	500	1,2	2	264	316,8	4	1267	1262	
	500	1,6	34	392	627,2	2	1254		
	500	2,0	15	316	632,0	2	1264		
27. Rotheseidenband. Einfassband.	500	1,2	64	512	614,4	2	1229	1246	
	500	1,6	34	392	627,2	2	1254		
	500	2,0	14	314	628,0	2	1256		
28. Mousselinstreifen	300	1,2	55	476	571,2	2	1142	1126	
	300	1,4	35	396	554,4	2	1109		
Mousselinstreifen	500	1,2	62	504	604,8	2	1210	1216	Controle mit Nr. 26
	500	1,4	45	436	610,4	2	1221		

Vierte Gruppe.

Körper	Spannung	λ	a	n	$(v) = n \cdot \lambda$	$2k$	v	Mittel	Bemerkungen
29. Pausleinwand	900	1,2	15,5	318	381,6	8	3053	3068	Töne schön und rein
	900	1,6	57	484	774,4	4	3098		
	900	1,8	42	424	763,2	4	3058		
30. Schwarzes Wachstum	1000	1,2	56	480	576,0	1	576	559	Töne dumpf, Controle mit Nr. 18 bei 500 g Spannung
	1000	1,4	34	392	548,8	1	549		
	1000	1,6	22	344	550,5	1	551		
31. Weissgraues Kautschuktuch	1000	1,2	21	340	408,0	1	408	423	Töne dumpf, Controle mit Nr. 30.
	1000	1,4	13	308	431,1	1	431		
	1000	1,6	3	268	428,8	1	429		
32. Rothe Chagrain-Leinwand	500	1,2	16	320	384,0	4	1536	1504	
	500	1,4	15	262	366,8	4	1467		
	500	1,6	54	472	755,2	2	1510		
33. Braune Chagrain-Leinwand	500	1,2	51	460	552,0	2	1104	1110	Controle mit Nr. 28 bei 300 g Spannung
	500	1,4	31	380	532,0	2	1164		
	500	1,6	19	332	531,2	2	1062		

Fünfte Gruppe.

Es ist mir nicht gelungen durch Streichen einen Gummistreifen zum Tönen zu bringen. Die überaus leichte Dehnbarkeit, die sich beim Streichen bemerklich macht, lässt nicht zu, dass longitudinale Schwingungen sich ausbilden können.

Sechste Gruppe.

Körper	Spannung	λ	a	n	$(v) = n \cdot \lambda$	$2k$	v	Mittel	Bemerkungen
34. Zusammen- gedrehtes Palmenblatt	500	1,2	19	332	398,4	8	3187	3159	
	500	1,6	58	488	780,8	4	3123		
	500	2,0	35	396	792,0	4	3168		
35. Dünner Streifen Tannenholz	1500	1,2	44	432	518,4	8	4147	4179	Schöne Töne
	1500	1,6	18	328	524,8	8	4198		
	1500	2,0	1,5	262	524,0	8	4192		
36. Dünner Streifen Buchenholz	1000	1,2	25	356	427,3	8	3418	3412	Ebenso
	1000	1,4	12	304	426,6	8	3413		
	1000	1,6	2,5	266	425,6	8	3405		
37. Dünner Streifen Eichenholz	1500	1,2	24	352	422,4	8	3379	3381	Ebenso
	1500	1,4	11	300	420,0	8	3360		
	1500	1,6	2,5	266	425,6	8	3405		

Siebente Gruppe.

Körper	Spannung	λ	a	n	$(v) = n \cdot \lambda$	$2k$	v	Mittel	Bemerkungen
38. Rothgefärbtes Schaafleder	100	1,2	40	416	499,2	1	499	471	Töne dumpf und unbestimmt
	100	1,4	21	340	476,0	1	476		
	100	1,6	4,5	274	438,4	1	438		
39. Pergament von einer Berliner Firma	1500	1,2	26	360	432,0	4	1728	1636	Töne unrein
	1500	1,6	52	464	842,4	2	1685		
	1500	1,8	40	416	747,8	2	1495		
40. Pergament von einer französischen Firma	2000	1,2	32	384	460,8	4	1843	1860	Töne rein
	2000	1,4	20	336	470,4	4	1882		
	2000	1,6	8,5	290	464,0	4	1856		
41. Darmstreifen	500	1,2	7	284	340,8	4	1363	1359	
	500	1,4	56	480	672,0	2	1344		
	500	1,6	42	424	684,4	2	1369		

Achte Gruppe.

Körper	Spannung	λ	a	n	$(v) = n \cdot \lambda$	$2k$	v	Mittel	Bemerkungen
42. Magnesiumstreifen	1000	1,4	39	412	576,8	8	4614	4602	
	1000	1,6	26	360	576,0	8	4608		
	1000	1,8	16	320	576,0	8	4608		
	1000	2,0	7,5	286	572,0	8	4576		

19. Es erübrigt jetzt noch einige weitere Bemerkungen zu den im Vorausgehenden mitgetheilten Resultaten hinzuzufügen. Bei den Körpern der *ersten* Gruppe ist auffällig, dass gerade das Seidenpapier die höchste Schallgeschwindigkeit aufweist und musste hierbei namentlich eine Controle eintreten, um vollkommen sicher zu sein. Sonst zeigen die verschiedenen Papiere gerade keine besondere Verschiedenheit bis auf den Löschkarton und das Strohpapier, welche Stoffe eine merklich geringere Schallgeschwindigkeit aufweisen, wie z. B. das Wattmann-Zeichenpapier.

Bei den Körpern der *zweiten* Gruppe sind interessant Nr. 19 und 20. Diese mit Farbstoffen überzogenen Copirpapiere werden bekanntermassen dazu benutzt um Schriftcopien oder Zeichencopien auf einem untergelegten Papier oder einem Stück Zeug, worauf gestickt werden soll, zu machen. Die Farbstoffe sind auf die Papiere lose aufgestrichen und lassen sich mit dem Finger wegwischen; dieselben sind demnach für das eigentliche Papier als Ballast zu betrachten, der nothwendig die Schallgeschwindigkeit verringern muss. Insbesondere zeigt sich wie der doppelseitige Ballast von No. 20 gegenüber dem einseitigen Ballast von No. 19 die Schallgeschwindigkeit noch mehr herabgedrückt hat.

Die *dritte* Gruppe ist namentlich interessant. Denn es kommen hierbei grosse Differenzen in der Schallgeschwindigkeit vor. No. 24 hat ein $v = 2015$ und No. 25 bei 500 gr Spannung 758 m Geschwindigkeit. Die Stoffe dieser dritten Gruppe haben ausser den Längsfäden der Streifen auch Quersfäden und leuchtet ein, dass die Quersfäden bei der Schallfortpflanzung zum Theil als Ballast zu betrachten sind. Es muss daher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei den stark quengerippten Stoffen, wie das No. 25 zeigt, auffällig geringer werden. Ferner erkennt man deutlich wie bei den Körpern dieser Gruppe die Spannung einen wesentlichen Einfluss ausübt.

Bei der *vierten* Gruppe macht sich der Einfluss des Ueberzugs, der rein als Ballast wirkt, so geltend, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit fast auf die der Luft herabkommt. Alles das also, was Wachstuch heisst, pflanzt den Schall nur mit sehr geringer Schallgeschwindigkeit fort. Dagegen sehen wir bei der Pausleinwand eine hohe Schallgeschwindigkeit. Ich

erkläre mir diese so, dass ich annehme, dass das Wachs oder der Körper, mit welchem der Stoff überstrichen ist, wirklich in den ganzen Stoff eingedrungen ist, sodass ein Stoff mit bedeutenderer Steifigkeit herauskommt, der als ein ganz neuer Körper aufzufassen ist.

Körper der *fünften* Gruppe konnte ich nicht in Longitudinalschwingungen versetzen. Beim Anstreichen geben diese Körper so nach, dass der ganze Streifen ungleichartig wird. Ob vielleicht das eine oder andere Kautschuckpräparat mehr sich zum Tönen eignet, lasse ich dahingestellt.

Die Körper der *sechsten* Gruppe zeigen eine hohe Schallgeschwindigkeit. Die Streifen wurden in Form von Hobelspähnen verwandt, welche sich in grösserer Länge sehr gut erhalten lassen. Es versteht sich von selbst, dass diese Körper auch als Stäbe hergerichtet und in gewöhnlicher Weise zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit benutzt werden können.

Von Körpern der *siebenten* Gruppe habe ich nur vier untersucht. Sie zeigen grosse Verschiedenheit. Die Pergamentstreifen waren schwierig zu beschaffen. Das von der französischen Firma bezogene Pergament ist echtes Pergament aus einem Kalbfell hergestellt. Die weicheren Ledersorten wie das gewöhnliche Schaffleder haben eine sehr geringe Schallgeschwindigkeit und liefern nur dumpfe Töne.

Die Körper der *achten* Gruppe konnte ich unberücksichtigt lassen, da dieselben als Saiten und Stäbe zur Disposition stehen und man auch die Schallgeschwindigkeit in ihnen grösstentheils kennt. Um jedoch bei einem Körper wenigstens die Schallgeschwindigkeit zu erfahren, suchte ich diese im Magnesium zu bestimmen. Ein 3 mm breiter und 0,18 mm dicker Magnesiumstreifen wurde benutzt und lieferte derselbe sehr regelmässige Töne aus denen sich eine Schallgeschwindigkeit von 4602 m ergab.

Ich schliesse hier meine Mittheilungen über meine Untersuchung ab, indem ich darauf aufmerksam mache, dass die betreffenden membranösen Körper noch mit Rücksicht auf Einzelfragen untersucht werden können und habe ich auch bezüglich dieser Einzelfragen verschiedene Versuche angestellt und Resultate erhalten. Es kann erwartet werden, dass die Temperatur von Einfluss ist, ferner dass der Wasserdampf

eine Rolle spielt. Sodann war es interessant einmal zu sehen, wie sich die Tonhöhe und die Schallgeschwindigkeit ändert, wenn man zwei oder drei Streifen nebeneinander zusammen untersucht oder einen breiteren Streifen ein- oder zweimal zusammenfaltet. Es zeigte sich hierbei, dass die Tonhöhe sank und die Schallgeschwindigkeit geringer wurde. Der Grund hierfür ist leicht zu finden. Denn offenbar werden zwei oder drei Streifen nebeneinander sich in ihren Schwingungen etwas hindern, indem zwischen ihnen Reibung stattfindet.

Marburg im Janur 1892.

V.

sei
liegklei
cess
einals
rat
def
Th
im
jen
auf
ers
gef
ist
sch
das
anwo
an
lei
gr
Ma
Di
we

V. Ueber integrierende Divisoren und Temperatur; von E. Buddé.

(Vorgetragen in der Berliner Physikalischen Gesellschaft am
12. Februar 1892.)

Die absolute Temperatur oder „Temperatur“ schlechthin sei im Folgenden mit ϑ bezeichnet. Ihre Grundeigenschaft liegt bekanntlich in dem von Clausius festgestellten Satze:

„Ist dQ die Wärmemenge, welche bei einem unendlich kleinen umkehrbaren Schritt eines thermodynamischen Processes bei der Temperatur ϑ verbraucht wird, so ist dQ/ϑ ein vollständiges Differential.“

Zeuner hat in seinem Lehrbuch diese Eigenschaft zuerst als die definitorische angesehen und demgemäss die Temperatur als den integrierenden Divisor des Wärmedifferentials definirt. Thatsächlich verwendet man die Temperatur in der Thermodynamik direct oder indirect (mittels der Entropie) immer unter Zugrundelegung des obigen Satzes; selbst diejenigen neueren Autoren, welche eine andere Verbaldefinition aufstellen, als Zeuner, z. B. Lippmann¹⁾, verwenden dieselbe erst, nachdem sie sie auf die Gestalt des obigen Satzes umgeformt haben. Darin liegt anerkannt, dass der Satz „ dQ/ϑ ist integrabel“ die wesentliche, praktisch verwendbare Eigenschaft der Temperatur ausspricht, und damit auch, dass es das naturgemässeste ist, ihn als Definition der Temperatur anzusehen.

Nun ist aber wohl schon von vielen Physikern bemerkt worden, dass die Zeuner'sche Definition dem Wortlaut nach an einer schweren Unzulänglichkeit leidet. Man kann sehr leicht beweisen, dass ein Differentialausdruck, der einen integrierenden Divisor besitzt, deren unendlich viele besitzen muss. Man kann demnach nicht schlechthin von „dem“ integrierenden Divisor eines gegebenen Differentials sprechen, vielmehr müsste, wenn die Temperatur als integrierender Divisor definirt werden

1) Lippmann, Journ. de. phys. 3. p. 53 und 277. 1884.

soll, ein einzelner, bestimmter von den unzähligen Divisoren der Grösse dQ unzweideutig kenntlich gemacht und hierauf zur Definition herangezogen werden.

Dass das möglich ist, und dass der so charakterisirte integrierende Divisor von dQ wirklich derjenige ist, den man bisher, ohne sich über seine Kriterien ganz klar zu sein, als „Temperatur“ verwendet hat, soll im Folgenden gezeigt werden. Es handelt sich dabei nach Lage des Problems zunächst um die Frage, ob unter den integrierenden Divisoren eines Differentialausdrucks überhaupt solche vorkommen, die durch eine besondere, jederzeit kenntliche Eigenschaft ausgezeichnet sind. Diese Frage muss durch eine kleine Untersuchung rein mathematischen Inhalts gelöst werden.

Es sei

$$Mdx + Ndy$$

ein Differential, in welchem M und N Functionen der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y sind, und von vornherein werde angenommen, dass $Mdx + Ndy$ nicht integrabel sei. Es seien ferner D und D_1 irgend zwei von einander verschiedene integrierende Divisoren unseres Differentials, und ihr Quotient D_1/D werde zur Abkürzung $= K$ gesetzt. Dann muss also sowohl

$$\frac{Mdx + Ndy}{D}, \text{ wie } \frac{Mdx + Ndy}{DK}$$

integrabel sein, d. h. es ist einerseits

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{M}{D} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{N}{D} \right),$$

und andererseits

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{K} \frac{M}{D} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{K} \frac{N}{D} \right).$$

Gleichung (2) ausgeführt gibt

$$\frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{M}{D} \right) - \frac{M}{K^2} \frac{1}{D} \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{N}{D} \right) - \frac{N}{D} \frac{1}{K^2} \frac{\partial K}{\partial x},$$

Mit Gleichung (1) findet sich hieraus sehr leicht

$$M \frac{\partial K}{\partial y} = N \frac{\partial K}{\partial x},$$

m. a. W.: Das Differential von K muss die Form haben

$$(3) \quad dK = \frac{Mdx + Ndy}{G},$$

wo $1/G$ irgend ein Factor ist. Nun ist K ein Quotient zweier existirenden Functionen, also selbst eine Function, folglich muss dK integrabel sein, d. h. G ist selbst irgend einer von den möglichen integrirenden Divisoren der Grösse $Mdx + Ndy$. Bezeichnen wir also ganz allgemein die möglichen integrirenden Divisoren dieser Grösse mit D_a , setzen abkürzend

$$(4) \quad \int \frac{Mdx + Ndy}{D_a} = F$$

und nennen die Integrale von dieser Form „entropoide Integrale“, so haben wir in Gleichung (3) den Satz „ K ist irgend eines der entropoiden Integrale“, oder, da D_1 und D ohne Beschränkung unter den D_a gewählt waren:

„Jeder integrirende Divisor des Differentials $Mdx + Ndy$ entsteht aus jedem anderen durch Multiplication mit irgend einem entropoiden Integral.“

Es ist nun von vornherein vorausgesetzt, dass $Mdx + Ndy$ nicht integrabel sei, also auch, dass weder M noch N von vorne herein verschwinde, d. h., es verschwindet weder der partielle Differentialquotient von F nach x , noch derjenige nach y ; m. a. W. „alle entropoiden Integrale enthalten sowohl x wie y .“ Und damit geht der vorstehende Satz über in den folgenden:

Jeder integrirende Divisor von $Mdx + Ndy$ entsteht aus jedem anderen durch Multiplication mit einer Grösse, welche sowohl x wie y enthält.

Hieraus folgt sofort, dass unter den unendlich vielen integrirenden Divisoren unseres Ausdrucks einer ist, der eine ausgezeichnete Eigenschaft hat — wenn er existirt. Gibt es nämlich einen unter ihnen, der eine blosse Function von x ist, so ist dieser der einzige seiner Art, jeder andere enthält neben x auch y ; dasselbe gilt, wenn einer vorhanden ist, der bloss y enthält; alle übrigen enthalten gleichzeitig x und y . Auch können die beiden ausgezeichneten Divisoren nicht zugleich existiren: gibt es einen solchen, der bloss x enthält, so gibt es keinen, der bloss y enthält, und umgekehrt.

Soll ein integrierender Divisor vorhanden sein, der nur x enthält, so wird der Ausdruck $Mdx + Ndy$ offenbar eine Bedingung erfüllen müssen. Diese findet sich sehr einfach, wenn

man Gleichung (1) unter der Voraussetzung ausführt, D sei frei von y . Man erhält

$$\frac{1}{D} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{D^2} \left(D \frac{\partial N}{\partial x} - N \frac{\partial D}{\partial x} \right)$$

oder

$$(5) \quad \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial x} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Hier steht links eine reine Function von x , also muss auch rechts eine solche stehen, d. h. die Bedingung dafür, dass ein integrierender Divisor von $Mdx + Ndy$ existire, welcher eine reine Function von x ist, lautet:

$$(6) \quad \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} = \text{einer reinen Function von } x.$$

Ist dieselbe erfüllt, so liefert Gleichung (5) durch Integration sofort den Werth des fraglichen Divisors; er ist

$$(7) \quad D = \text{const. } e^{\int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx}$$

Hiermit sind die mathematischen Grundlagen der Untersuchung gegeben, und wir wenden uns zu ihrem physikalischen Theil. Die Erfahrung lehrt, dass es gewisse Grössen gibt, die einen nahen Zusammenhang mit dem Uebergangsbestreben der Wärme zeigen. Solche Grössen sind z. B. das Volumen eines gegebenen Körpers beim Druck seines eigenen Dampfes oder bei constantem Druck, oder bei einem Druck, der seinerseits durch das Volumen des Körpers regulirt wird, der elektrische Leitungswiderstand eines gegebenen Drahtes, die Dissociationsspannung eines gegebenen Products, u. dergl. mehr. Irgend eine dieser Grössen ändert sich, wenn dem betreffenden Körper Wärme zugeführt wird, und zugleich ändert sich die Fähigkeit des Körpers, Wärme abzugeben. Früher hat man eine der vorerwähnten Grössen, nämlich das Volumen eines gegebenen Gasquantums, besonders bevorzugt, hat das nicht näher definirte Bestreben, Wärme abzugeben, Temperatur genannt, und das Volumen eines gegebenen Gases als Maass der Temperatur angesehen. Nun hat W. Thomson schon im Jahre 1848 darauf aufmerksam gemacht, dass die Temperatur nicht wohl anders als auf Grund des Carnot'schen

Principis definirt werden kann¹⁾, und neuerdings hat Lippmann in seiner oben citirten Abhandlung scharf hervor gehoben, dass auch das Luftthermometer die Temperatur nicht eigentlich misst, sondern nur die Möglichkeit an die Hand gibt, bestimmte Temperaturpunkte wiederzufinden, dass ferner irgend eine andere der eben erwähnten Grössen, z. B. der Widerstand eines Metalldrahts, den gleichen Dienst mit der gleichen Berechtigung leisten kann. (Das Luftthermometer wird allerdings zum Temperaturmesser, wenn man die Nebenannahme macht, dass die Gase bei der Ausdehnung keine innere Arbeit leisten, aber einerseits kann dies erst dann bewiesen werden, wenn man eine zuverlässige Definition der Temperatur besitzt, andererseits ist die Nebenannahme nur annähernd erfüllt, und wir wissen von vornherein nicht, wie weit die Annäherung geht. Von vornherein bedeutet also das Luftthermometer für die absolute Temperaturmessung nicht mehr, als etwa das Weingeistthermometer oder als ein graduirter Leitungswiderstand.)

Wir werden hiernach das Wort „Temperatur“ vorläufig vermeiden und Folgendes festsetzen: Irgend einen Körper, an welchem eine der oben genannten Eigenschaften sich messen lässt, wähle man willkürlich aus. Zur Bequemlichkeit (nämlich um eine Discussion über zweideutige Bestimmungen überflüssig zu machen) sei der Körper so gewählt, dass die an ihm zu messende Grösse innerhalb derjenigen Grenzen, wo wir ihn benutzen, fortwährend wächst, wenn man ihm fortwährend Wärme zuführt. Diese Eigenschaft besitzt z. B. eine Gasmenge oder ein gegebenes Gewicht von Quecksilber für Volumenmessungen, sowie auch ein Kupferdraht für Widerstandsmessungen. Innerhalb der Grenzen, wo wir es überhaupt benutzen können, wächst das Volumen des Gases oder des Quecksilbers fortwährend, wenn man dem Gase oder dem Quecksilber immer mehr Wärme zuführt, ebenso der Widerstand des Kupferdrahts. Man schaffe eine Vorrichtung, welche jene Volumina oder diesen Widerstand an einer willkürlich graduirten Scala zu messen gestattet, nenne diese Vorrichtung ein Thermometer und die an ihr gemessene Grösse

1) W. Thomson, *Phil. Mag.* **33.** p. 313. 1848.

die „thermometrische Scalenhöhe“; die Letztere werde mit t bezeichnet. Die Erfahrung liefert dann den Satz:

„Zwei Körper sind unter sich in thermischem Gleichgewicht, wenn jeder von ihnen mit einem Thermometer von gegebener Scalenhöhe im Gleichgewicht ist.“

Darauf hin schreiben wir allen Körpern, die mit einem Thermometer von der bestimmten Scalenhöhe t im Gleichgewicht sind, die Scalenhöhe t zu. Darauf hin können wir ferner ein willkürlich ausgewähltes Thermometer als Normalthermometer bezeichnen, andere von gleicher oder verschiedener Construction nach ihm graduiren und die so erhaltenen Scalen als ein für allemal gültig erklären.

Dann zeigt uns die Beobachtung ferner:

„Die Wärme geht von selbst, d. h. ohne dass mechanische, chemische etc. Arbeitsleistungen eingreifen, stets von Körpern grösserer Scalenhöhe zu Körpern geringerer Scalenhöhe.“

Die eine Grundannahme der mechanischen Wärmetheorie geht nun dahin, dass dieser Satz erhalten bleibt, wenn in den Uebergang der Wärme zwar Arbeitsprocesse eingreifen, aber nur solche Arbeitsprocesse, die sich gegenseitig genau aufheben. Bezieht man diese Annahme in den vorstehenden Satz ein, so ist er der zweite Grundsatz von Clausius, befreit von der vorläufig noch nicht motivirten Anwendung des Wortes Temperatur.

Mit ihm betrachten wir nun einen thermodynamischen Process an einem System, welches durch zwei Grundvariable bestimmt ist. Als die eine dieser Grundvariablen wählen wir die thermometrische Scalenhöhe t , als die andere das Volumen v ; der Process sei ein für allemal umkehrbar gedacht. Das Differential der verbrauchten Wärme für den unendlich kleinen Schritt hat dann die Form

$$(8) \quad dQ = \frac{\partial Q}{\partial t} dt + \frac{\partial Q}{\partial v} dv.$$

Betrachten wir speciell den Carnot-Clapeyron'schen Kreisprocess, wie ihn Clausius in seiner ersten Abhandlung benutzt hat, so finden sich die allbekannten Ausdrücke:

Die verbrauchte Wärme ist

$$= \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Q}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right) \right] dv dt,$$

die übergegangene Wärme ist

$$= \frac{\partial Q}{\partial v} dv dt,$$

und das Carnot-Clausius'sche Beweisverfahren sagt: Soll es nicht möglich sein, unbegrenzte Wärmemengen ohne Verbrauch von Arbeit aus Körpern von kleinerer Scalenhöhe in Körper von grösserer Scalenhöhe zu schaffen, so muss der Quotient aus verbrauchter und übergegangener Wärme eine blosse Function der Scalenhöhe sein. Also muss sein

$$(9) \quad \frac{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Q}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)}{\frac{\partial Q}{\partial v}} = \text{einer reinen Function von } t.$$

Dies ist aber genau die Bedingung (6), wenn t statt x , v statt y , $\partial Q/\partial t$ statt M und $\partial Q/\partial v$ statt N steht. Also ist die vorstehende Grundgleichung (9) von Clausius die Bedingung dafür, dass der Differentialausdruck

$$\frac{\partial Q}{\partial t} dt + \frac{\partial Q}{\partial v} dv$$

einen integrierenden Divisor besitze, der eine blosse Function von t ist. Und nach dem Obigen existirt nur ein einziger integrierender Divisor von dQ , der diese Eigenschaft hat. Also sind wir nunmehr in der Lage, die vollständige Definition der Temperatur zu geben:

Temperatur heisst derjenige integrierende Divisor des bei umkehrbaren Schritten verbrauchten Wärmedifferentials, welcher eine blosse Function der thermometrischen Scalenhöhe ist.

Zugleich ergibt dann Gleichung (7) die Methode zur Bestimmung der Temperatur; man studire irgend ein System so, dass man in der für dasselbe gültigen Gleichung (8) die Coefficienten $\partial Q/\partial t$ und $\partial Q/\partial v$ innerhalb eines gewissen, mit t_0 beginnenden Intervalls kennt. Dann ist in diesem Intervall

$$(9) \quad \vartheta = \vartheta_0 e^{\int_{t_0}^t \frac{1}{\frac{\partial Q}{\partial v}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Q}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right) \right] dt}$$

ϑ_0 ist der zur Scalenhöhe t_0 gehörige Werth der Temperatur; ϑ_0 ist willkürlich, so lange die Einheit der Temperatur willkürlich ist. Die Gleichung (9) ist nun schon von Lippmann l. c. aufgestellt und hier nur der Vollständigkeit wegen

reproducirt. Der praktische Werth der hier geführten Untersuchung beschränkt sich also auf den Nachweis, dass Lippmann's Temperaturbestimmung durch die Theorie der integrierenden Factoren begründet wird. Bei Lippmann kann übrigens v nicht bloß das Volumen, sondern irgend eine von den Grössen bezeichnen, welche als zweite Grundvariable dienen können. Die Zulässigkeit dieser Verallgemeinerung ist leicht nachzuweisen; für den Zweck der Definition war es angebracht, unter v bloß das Volumen zu verstehen.

Man sieht nun auch, warum die Zeuner'sche Definition in der Anwendung nie auf Unzuträglichkeiten geführt hat: die Bedingung, dass ϑ eine blosse Function der Scalenhöhe sein muss, ist von den Autoren immer innegehalten worden. Bei Clausius und anderen älteren Schriftstellern ergab sich das schon daraus, dass die Scalenhöhe als eine Art von angenäherter Temperatur behandelt wurde, bei den meisten späteren geschieht es stillschweigend, bei Lippmann ausdrücklich, indem er den Satz „ ϑ ist eine blosse Function von t “ in seine Beweisführung aufnimmt.

VI. *Ueber die galvanische Polarisation an kleinen Electroden; von K. R. Koch und A. Wüllner.*

(Schluss.)

9. Die in den vorigen Paragraphen mitgetheilten Beziehungen zwischen der Polarisation und der Stromstärke bestehen nur bis zu einer gewissen, von der Länge der Spitzen und der Concentration der Lösung abhängigen Stromstärke. Versucht man durch Vergrößerung der electromotorischen Kraft den Strom über diese Grenze hinaus zu verstärken, so tritt plötzlich eine sehr starke Zunahme der Polarisation und dem entsprechend eine starke Abnahme des Stromes ein.¹⁾

Diese starke Zunahme der Polarisation tritt bei Anwendung eines Paares nahezu gleicher Spitzen in der Regel, bei Spitzen erheblich verschiedener Länge immer an der kürzeren Spitze ein, einerlei ob diese kürzere Spitze Anode oder Kathode ist.

Mit diesem Wachsen der Polarisation an der einen Spitze ist dann, entsprechend der Abnahme der Stromstärke, stets eine starke Abnahme der Polarisation an der anderen Electrode verbunden. Die Erscheinung tritt ebenso ein, wenn man eine Spitze als Anode oder Kathode einer Platte gegenüberstellt.

Ist die Stromstärke, bei welcher der regelmässige normale Durchgang des Stromes aufhört, wir wollen sie den „Grenzstrom“ nennen, gerade erreicht oder eben überschritten, so tritt in der Regel die starke Zunahme der Polarisation und die starke Abnahme der Stromstärke, wir wollen die Erscheinung den „Stromumschlag“ nennen, zunächst noch nicht dauernd ein. Während des Stromdurchganges tritt plötzlich der Umschlag

1) Während wir mit diesen Untersuchungen beschäftigt waren, erhielten wir Kenntniss von einer Mittheilung des Hrn. Richarz in der Sitzung der niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde vom 7. Juli 1890, in welcher die Erscheinung des Stromumschlages und einige der von uns gemachten Beobachtungen bereits beschrieben sind.

auf, die Nadel des Galvanometers geht plötzlich zurück, die des Electrometers, wenn dasselbe an der Electrode liegt, an welcher die Polarisation wächst, geht plötzlich heraus; ebenso plötzlich entwickelt sich nach längerer oder kürzerer Zeit der normale Strom wieder und die Polarisation nimmt an beiden Electroden den durch die früheren Beziehungen gegebenen Werth an. Sind die Electroden des Spitzenpaares von gleicher Länge, so verläuft die Erscheinung in der Nähe des Grenzstromes auch mehrfach so, dass, wenn die Polarisation an der Electrode, die zunächst den Umschlag bewirkt hat, abnimmt, sie an der anderen Electrode über den normalen Werth wächst, sodass nun sofort der Umschlag von der anderen Electrode bewirkt wird. Dieser Wechsel trat zuweilen besonders bei recht kurzen Spitzen so rasch ein, dass jede Messung ausgeschlossen war. Weder die Nadel des aperiodisch gedämpften Galvanometers, noch jene des Electrometers kam zur Ruhe.

Fast immer erhielt man constante Verhältnisse, wenn man einer kürzeren Spitze eine erheblich längere oder eine Platte gegenüberstellte, nur in einem Falle, 0,5 mm Spitze in 1procent. Lösung, wurde auch dann der Strom nicht constant, als die Wasserstoffpolarisation die Ursache des Stromumschlages war.

An welcher Electrode die den Stromumschlag bedingende hohe Polarisation eintrat, liess sich sofort an der Gasentwicklung erkennen. Während bei dem normalen Durchgange des Stromes an beiden Electroden sich das Gas in Form eines stetigen Stromes entwickelt, wie Fig. 15 Tafel VI für die Kathode, Fig. 16 für die Anode nach einer Momentphotographie zeigen, entwickelt sich das Gas nach dem Umschlage an der Electrode mit hoher Polarisation in einzelnen Blasen. Die Figuren 17 und 18 zeigen ebenfalls nach Momentphotographien diese Entwicklung, Fig. 17 an der Anode, Fig. 18 an der Kathode. Die Photographien wurden erhalten, indem man die Electroden in ein Projectionsgefäss mit planparallelen Platten einsetzte, mit electrischem Lichte beleuchtete und die Erscheinung auf einen weissen Schirm projecirte. Die Projection wurde photographirt. Beide Abbildungen zeigen, dass sich das Gas zunächst unten, dort wo der Draht aus dem Glase hervortritt, entwickelt, sich an der Spitze zu einer grösseren Blase ansammelt und sich dann losreisst.

Die Blasen folgen sich je nach der Stärke des übriggebliebenen Stromes mehr oder weniger schnell; zuweilen schien es uns, als wenn an der Anode, wenn diese den Umschlag bewirkte, die Zahl der entwickelten Blasen nahezu doppelt so gross sei als an der den Umschlag bewirkenden Kathode. Wenn auch, wie sich zeigen wird, der übrigbleibende Strom, wir wollen ihn den „Reststrom“ nennen, wenn der Umschlag an der gleichen Spitze durch die Sauerstoffpolarisation bewirkt wird, stärker zu sein scheint als der durch Wasserstoffpolarisation bewirkte Reststrom, so ist diese grössere Blasen Zahl an der Anode doch nicht die Regel, denn wir haben unter den gleichen Verhältnissen später auch an der Kathode die grössere Zahl von Blasen gefunden. Eine Messung und Vergleichung der Gasmengen, indem man etwa eine und dieselbe Spitze einmal als Kathode, einmal als Anode einer Platte gegenüberstellt, ist leider nicht möglich, da man eine derartige Messung nur vornehmen kann unter Anwendung einer electromotorischen Kraft, die diejenige des Grenzstromes weit übersteigt; man erhält sonst, wie schon erwähnt, die wechselnde Erscheinung, Umschlag und Rückkehr zum normalen Strom. Bei solchen electromotorischen Kräften wird indess, wie wir später näher besprechen werden, der Draht als Anode bald zerstört.

Das Entwickeln und Abreissen der Gasblasen ist stets mit einer Schwankung des Stromes verbunden, der Strom nimmt, während sich die Blase bildet, bis zu dem Momente des Abreissens zu, ist die Blase abgerissen, so springt der Strom auf den früheren kleinen Werth zurück. Mit der Zunahme des Stromes geht parallel eine kleine Abnahme der Polarisation der Electrode. Um eine Andeutung über die Grösse der Stromschwankung zu geben, sei erwähnt, dass, als der Strom an einer 3 mm langen Electrode beobachtet wurde und der Reststrom etwa 0,1 Amp. war, die Schwankung etwa 0,02 Amp. betrug.

Der Stromumschlag gab sich auch in dem im Nebenschluss eingeschalteten Telephon zu erkennen. Ein in dieser Weise eingeschaltetes Telephon gibt stets ein sausendes Geräusch, wenn sich in dem Strome eine Zersetzungszelle befindet; dieses Rauschen tritt bei kleineren Spitzen stärker auf als bei längeren, ja bei unseren kürzesten Spitzen ging das Rauschen sogar in

ein Rasseln über. Es ist gerade, als wenn das Entwickeln der Gasblasen Stromschwankungen zur Folge hätte, die sich in dieser Weise hörbar machen; am Galvanometer lassen sich dieselben allerdings nicht erkennen.

Das Tönen des Telephons wird im allgemeinen, besonders bei den längeren Spitzen stärker nach dem Umschlag, ohne dass aber, wie auch Hr. Wiener zu constatiren die Freundlichkeit hatte, der Character des Geräusches sich ändert. Die Stromschwankung, welche bei dem Entwickeln und Abreißen der Blase von der Electrode eintritt, macht sich in dem Telephon sehr deutlich durch eine Zunahme des Geräusches erkennbar, welche Zunahme mit einem scharfen Tone, einem starken „Klack“ abbricht.

10. Im nachfolgenden geben wir die Stromstärke und electromotorischen Kräfte, bei welchen der Umschlag in den verschieden concentrirten Lösungen an den Spitzen verschiedener Länge eintrat, sowie die Beobachtungen über den Reststrom.

I.

1 procent Lösung.

In dieser Lösung konnte nur bei den kürzesten Spitzen der Strom soweit gesteigert werden, dass der Umschlag eintrat, bei den längeren reichte unsere Batterie von 49 Groves nicht aus. Der Grenzstrom war 0,07 bis 0,08 Amp., die Potentialdifferenz D an den Electroden etwa 80 Volt; die in den betreffenden Tabellen 3 und 4 angegebenen stärksten Ströme sind die Grenzströme, es wurde schon früher auf den dann eintretenden Umschlag hingewiesen. Bei der Schaltung der Spitzen $A \rightarrow B$, bei welcher der Umschlag zeitweise auf kurze Zeit bei dem Grenzstrom eintreten war, wurde der Stromdurchgang ein ganz schwankender, als die Potentialdifferenz der Spitzen auf etwa 90 Volt gesteigert wurde. Zunächst stieg die Sauerstoffpolarisation auf etwa 86 Volt und ging dann herunter auf 22 Volt. Ist die Sauerstoffpolarisation gross, so ist die Wasserstoffpolarisation klein, nimmt erstere ab auf 22 Volt, so wächst letztere auf 45 Volt. Nach kurzer Zeit ging die Wasserstoffpolarisation erheblich weiter, dann aber schnell auf einen sehr kleinen Werth zurück, während die

Sauerstoffpolarisation auf ihren hohen Werth stieg. Dieses Spiel wiederholte sich längere Zeit ohne Eintreten eines constanten Zustandes.

Das Verhalten wurde constanter als zur Kathode eine 5 mm lange Spitze genommen wurde; in der Zeit zwischen dem Entwickeln der Blasen an der Anode war

$$p_a = 89,15 \text{ (Volt)}, p_k = 1,05 \text{ (Volt)}, D = 90,6 \text{ (Volt)}, \\ i = 0,0014 \text{ (Amp.)}.$$

Bei dem Entwickeln der Sauerstoffblase stieg der Strom bis 0,0027.

Als an der Stelle der Sauerstoffspitzen *A* eine 5 mm Spitze genommen und die kurze Spitze *B* durch Wasserstoff polarisirt wurde, blieb die Erscheinung stets schwankend, die Wasserstoffpolarisation nahm bis zu einem hohen Werthe zu und dann wieder ab, sodass keine Messung möglich war, auch wenn die Spitze *A* durch Wasserstoff polarisirt war, gegen eine längere Spitze als Anode trat kein constanter Zustand ein.

Als die Spitze *B* zur Anode gegen eine 5 mm Spitze als Kathode verwandt wurde, erhielten wir constant

$$p_a = 89,62 \text{ (Volt)}, p_k = 1,66 \text{ (Volt)}, D = 92,4 \text{ (Volt)}, \\ i = 0,004 \text{ (Amp.)}$$

Obwohl die Messungen bei dem Schwanken des Stromes wenig Sicherheit für *i* liefern, ergibt sich der Widerstand *W* aus *D* - *p* und *i* doch den früher gefundenen Werthen entsprechend zu 290 bez. 280 Ohm.

II.

10procent. Lösung.

Spitzen 0,5 mm lang. Grenzstrom: $p_a = 9,45 \text{ (Volt)}$, $p_k = 7,52 \text{ (Volt)}$, $D = 21,97 \text{ (Volt)}$, $i = 0,1499 \text{ (Amp.)}$. Der Reststrom wurde nicht weiter verfolgt.

Spitzen 3 mm lang. Grenzstrom: $p_a = 8,38 \text{ (Volt)}$, $p_k = 9,40 \text{ (Volt)}$, $D = 40 \text{ (Volt)}$, $i = 0,741 \text{ (Amp.)}$, *D* konnte nicht mehr beobachtet werden, der Werth 40 ergibt sich aus *i* und *W* = 30 Ohm zu 40,01 Volt.

Die Schaltung war hier *A* → *B*, der Stromumschlag erfolgte durch Wachsen der Wasserstoffpolarisation an der Spitze *B*. Es war nach dem Umschlag $p_a = 2,94 \text{ (Volt)}$, $p_k = 56,59 \text{ (Volt)}$,

$D = 62,3$ (Volt), $i = 0,0928$ (Amp.), $W = 29,95$ Ohm. In der Richtung $B \rightarrow A$ war bei $i = 0,7549$ (Amp.) und $D = 40,86$ (Volt) der Grenzstrom noch nicht erreicht.

Es wurde jetzt als Sauerstoffelectrode eine Platte, zur Kathode die Spitze B , genommen und vom Grenzstrom aus durch Vermehrung der Elementenzahl die electromotorische Kraft vergrößert. Es ergab sich

p_a (Volt)	p_k (Volt)	p (Volt)	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)
1,49	57,40	58,89	61,26	0,0913	26,0
1,51	58,51	60,02	62,95	0,0917	31,9
1,50	64,27	65,77	68,23	0,0905	27,2
1,72	80,30	82,02	84,85	0,0973	29,1

Es wurde darauf die Spitze A als Anode gegen eine Platte als Kathode verwandt. Der Umschlag war mit Anwendung von 44 Elementen eingetreten und kurze Zeit war $p_a = 56,95$, $p_k = 1,13$ und $i = 0,1821$. Ehe die Messung der Potentialdifferenz D ausgeführt werden konnte, stieg plötzlich die Sauerstoffpolarisation auf 70, und die nachträgliche Untersuchung der Spitze ergab eine Verkürzung derselben auf 1 mm. Auf diese Veränderung der Anodenspitzen kommen wir später. An der so verkürzten Spitze erhielten wir folgende Werthe:

p_a (Volt)	p_k (Volt)	p (Volt)	D (Volt)	i (Amp.)
70,52	0,996	71,52	71,90	0,0067
78,18	0,990	79,17	79,36	0,0049
86,24	1,020	87,26	87,34	0,0043

Die Berechnung von W ist bei der Kleinheit der Differenz $D - p$ zu unsicher.

Spitzen 5 mm lang. Bei Anwendung der beiden Spitzen rief der stärkste von uns erreichbare Strom 1,14 den Umschlag noch nicht hervor.

Als eine 5 mm Spitze zur Anode eine Platte zur Kathode genommen wurde, trat der Umschlag ein, als der Strom eine Zeit lang 1,47 gewesen war. D war nicht mehr für den Grenzstrom zu messen. Es war dann nach dem Umschlage

$$p_a = 66,70 \text{ (Volt)}, p_k = 1,17 \text{ (Volt)}, p = 67,87 \text{ (Volt)}, \\ D = 80,72 \text{ (Volt)}, i = 0,312 \text{ (Amp.)}.$$

Gleich nach der Messung zerstäubte die Spitze und brach unmitttelbar über der Einschmelzstelle ab. Mit einer anderen

Spitze ging es ähnlich, sie wurde glühend und spaltete ihrer ganzen Länge nach, als der Strom kurze Zeit 1,246 (Amp.) gewesen war. Der Versuch wurde sofort unterbrochen, um die Spitze in diesem Zustande zu erhalten. Die Anwendung einer Anodenplatte gegen die 5 mm Spitze als Kathode ergab folgende Beobachtungen:

p_a (Volt)	p_k (Volt)	p (Volt)	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	
2,06	10,88	12,94	51,37	1,2670	30,3	Grenzstrom
1,51	55,24	56,75	62,66	0,1965	30,1	Stromum- schlag und Reststrom
1,50	57,14	58,64	64,45	0,1920	30,3	
1,49	61,96	63,45	70,42	0,2011	34,7	
1,50	69,48	70,98	77,10	0,1967	31,1	
1,50	76,05	77,55	84,13	0,1965	33,5	

Die Beobachtungen an den Spitzen von 3 mm und 5 mm Länge zeigen deutlich, dass nach Eintritt des Stromumschlages der Reststrom mit zunehmender electromotorischer Kraft nicht mehr wächst, sondern constant bleibt, dass bei der Zunahme der Potentialdifferenz der Electroden die ganze Zunahme nur als Vermehrung der Polarisation der Electrode auftritt, durch welche der Stromumschlag eingetreten ist.

III.

20 procent. Lösung.

Spitzen 0,5 mm lang. Grenzstrom: 0,1798 (Amp.), $D = 16,92$ (Volt). Anodenplatte gegen Kathodenspitze gibt als Reststrom etwa 0,017 (Amp.) zu genauerer Messung waren die Verhältnisse nicht hinreichend constant; es ist

$$p_a = 1,19 \text{ (Volt)}, p_k = 20,28 \text{ (Volt)}, D = 21,82 \text{ (Volt)}.$$

Spitzen 3 mm lang. Grenzstrom: 0,7026 (Amp.). $D = 26,2$ (Volt), Anodenplatte gegen Kathodenspitze gab:

$$p_a = 1,44 \text{ (Volt)}, p_k = 47,30 \text{ (Volt)}, p = 48,74 \text{ (Volt)},$$

$$D = 50,59 \text{ (Volt)}, i = 0,0890 \text{ (Amp.)}, W = 20,8 \text{ (Ohm)},$$

$$p_a = 1,46 \text{ (Volt)}, p_k = 52,34 \text{ (Volt)}, p = 53,80 \text{ (Volt)},$$

$$D = 55,69 \text{ (Volt)}, i = 0,0902 \text{ (Amp.)}, W = 21,0 \text{ (Ohm)}.$$

Anodenspitze gegen Kathodenplatte lässt keine Messung zu, da die Anodenspitze sich sehr schnell verkleinert, p_a wächst zusehends von 44,77 (Volt) auf 46,81 (Volt), während der Reststrom von 0,1725 auf 0,1052 (Amp.) abnimmt. Die sofort herausgenommene Spitze zeigt eine Länge von 0,9 mm.

Spitzen 5 mm lang. Der Grenzstrom ist ebenfalls nur durch Anwendung einer Plattenelectrode als Anode zu erhalten, derselbe liegt zwischen 1,4 und 1,5 (Amp.). Der Reststrom ist, als zur Anode eine Platte genommen wurde, 0,1634 (Amp.), es war

$$p_a = 1,53 \text{ (Volt)}, p_k = 60,8 \text{ (Volt)}, D = 64,83 \text{ (Volt)}, \\ W = 24,5 \text{ (Ohm)}.$$

Die Spitze als Anode verwandt gestattete die Durchführung der Messung nicht, es zeigte sich kurze Zeit ein Reststrom 0,1488 (Amp.) und $p_a = 68,34$ (Volt), $p_k = 1,295$ (Volt); die Spitze wurde glühend und brach 0,5 mm über dem Glase ab.

IV.

30,4 proc. Lösung.

Spitzen 0.5 mm lang. Grenzstrom als die längere der beiden Spitzen nämlich *B* zur Anode genommen war, 0,2010 Amp., die Potentialdifferenz der Electroden war $D = 13,86$ Volt; ein dauernder Reststrom trat erst ein, als die Potentialdifferenz der Spitzen auf über 30 Volt gesteigert wurde, es war:

$$p_a = 2,96 \text{ Volt}; p_k = 28,11 \text{ Volt}; p = 31,07 \text{ Volt}. D = 31,64 \text{ Volt}. \\ i = 0,0272 \text{ Amp. } W = 20,9 \text{ (Ohm)}.$$

Bald darauf trat ein Wechsel der Polarisation, nämlich starke Sauerstoffpolarisation, geringe Wasserstoffpolarisation ein.

$$p_a = 30,57 \text{ Volt}; p_k = 1,69 \text{ Volt}; p = 32,26 \text{ Volt}; D = 32,38 \text{ Volt}; \\ i = 0,00809 \text{ Amp.}$$

Spitzen 3 mm lang. Anode Platte, Kathode Spitze, Grenzstrom 0,8778 Amp.

$$p_a = 1,74 \text{ Volt}; p_k = 6,59 \text{ Volt}. D = 24,61 \text{ Volt}.$$

Der Reststrom wurde 0,08914 Amp.

$$p_a = 1,42 \text{ Volt}; p_k = 35,7 \text{ Volt}. D = 38,72 \text{ Volt}. W = 18,3 \text{ (Ohm)}.$$

Als die Spitze zur Anode genommen wurde, liess sich der Versuch nicht beenden, da sich die Spitze sehr schnell verkürzte. Bei den Spitzen von 5 mm Länge, haben wir in dieser Lösung den Umschlag nicht verfolgt, wir erhielten nur einen Umschlag als die Spitze als Anode gegen eine Platte als Kathode angewandt wurde; die Sauerstoffpolarisation war 73,6 Volt, indess wissen wir nicht, ob die Spitze noch unverändert war.

V.

42 proc. Lösung.

Spitzen 0,5 mm lang. Als Grenzstrom ergab sich im Mittel 0,12 Amp. aus 2 Beobachtungen, bei denen jede der Spitzen einmal als Anode einmal als Kathode benützt wurde, die Potentialdifferenz der Spitzen war 11,7 Volt im Mittel. Als dann eine Platte als Anode gegen jede der Spitzen als Kathode verwandt wurde, ergab sich:

$$p_a = 1,28 \text{ Volt}; p_k = 24,31 \text{ Volt}; D = 25,62 \text{ Volt};$$

$$i = 0,0051 - 0,0062 \text{ Amp.}$$

$$p_a = 1,27 \text{ Volt}; p_k = 25,38 \text{ Volt}; D = 26,42 \text{ Volt}; i = 0,0084 \text{ Amp.}$$

Die Spitzen als Anoden gegenüber der Platte als Kathode

$$p_a = 24,55 \text{ Volt}; p_k = 1,02 \text{ Volt}; D = 25,57 \text{ Volt}; i = 0,0035 \text{ Amp.}$$

$$25,91 \text{ „ } 1,04 \text{ „ } 26,95 \text{ „ } 0,0048 \text{ „}$$

Spitzen 3 mm lang. Grenzstrom im Mittel 0,82 Amp. bei einer Potentialdifferenz von im Mittel 29,4 Volt zwischen den Spitzen. Für den Reststrom ergab sich:

p_a	p_k	p	D	i	W
3,11 Volt	58,61 Volt	61,73 Volt	63,46 Volt	0,0905 Amp.	19,1 Ohm Spitze geg. Spitze.
1,50 „	57,68 „	59,19 „	60,86 „	0,1006 „	16,7 „ Platte → Sp. A.
1,49 „	59,66 „	61,15 „	63,23 „	0,1006 „	20,8 „ Platte → Sp. B.
1,54 „	55,74 „	57,28 „	59,19 „	0,0870 „	22,0 „ Platte → Sp. A.

Eine Spitze als Anode gegen eine Platte als Kathode, wurde während des Versuches zerstäubt, die beobachtete Polarisation von 71 Volt an der Anode bezieht sich desshalb ohne Zweifel auf eine kürzere Spitze.

Spitzen 5 mm lang. Zwischen den Spitzen ergab sich als Grenzstrom 1,45 Amp. bei einer Potentialdifferenz von 41 Volt. Mit Platte als Anode gegen die Spitzen als Kathoden ergab sich:

p_a	p_k	p	D	i	W
1,61 Volt	67,11 Volt	68,72 Volt	72,15 Volt	0,1805 Amp.	19,0 Ohm Platte → Sp. B.
1,55 „	63,93 „	65,48 „	70,11 „	0,2013 „	23,0 „ Platte → Sp. A.

Auch hier gab die Verwendung der Spitze B als Anode sofort zur Zerstäubung der Spitze Anlass, die beobachtete Polarisation $p_a = 76,37 \text{ Volt}$, und der Reststrom $i = 0,0901 \text{ Amp.}$ beziehen sich ohne Zweifel auf eine schon verkürzte Spitze.

In der folgenden kleinen Tabelle sind hiernach für die verschiedenen Spitzen und Lösungen die Grenzströme unter G die Restströme unter R zusammengestellt. Ausser bei den 0,5 mm Spitzen, für 1 proc. Lösung sind die Restströme jene, welche bei grosser Wasserstoffpolarisation erhalten wurden.

	Spitzen 0,5 m		Spitzen 3 mm		Spitzen 5 mm	
	G	R in Amp.	G	R in Amp.	G	R in Amp.
1 proc. Lösung	0,07—0,08	0,0027	—	—	—	—
10 " "	0,15	—	0,741	0,0927	1,276	0,1966
20 " "	0,18	0,017	0,708	0,0896	1,450	0,1634
30 " "	0,20	0,027	0,877	0,0891	—	—
42 " "	0,12	0,008	0,820	0,0930	1,460	0,1900

11. Zur genaueren Kenntniss der hier besprochenen Erscheinung ist zunächst noch die Frage zu beantworten, ob der Stromumschlag bei gegebener Spitze und gegebener Lösung eintritt, wenn der Strom eine gewisse Stärke, oder wenn die Potentialdifferenz eine gewisse Höhe hat. Zur Entscheidung dieser Frage wurden die Electrodenzellen durch ein doppeltes Rohr verbunden, deren eines durch einen Hahn verschlossen werden konnte. War die Stromstärke das den Umschlag bedingende, so musste, wenn bei geöffnetem Hahne der Grenzstrom gerade erreicht war, ein vorhandener Umschlag rückgängig werden, wenn der Hahn zwischen den Electrodenzellen geschlossen wurde, da infolge des erheblich grösseren Widerstandes der Strom geschwächt wurde, die Potentialdifferenz zwischen den Spitzen dagegen zunahm. War dagegen die Potentialdifferenz das massgebende, so musste der bei geschlossenen Hahnen gerade erreichte Umschlag bei Oeffnung der Hahnen, rückgängig werden, da infolge der Verminderung des Widerstandes zwischen den Zellen die Potentialdifferenz abnahm und der Strom zunahm. Der Versuch entschied in ersterem Sinne.

Es wurde eine 20 proc. Lösung und 0,5 mm lange Spitzen benutzt. Als der Hahn des verschliessbaren Rohres geöffnet war, trat der Umschlag nach kurzer Dauer des Stromschlusses bei einem Strom von 0,189 Amp. ein, die Potentialdifferenz betrug 14 Volt. Als der Hahn geschlossen wurde, ging der Strom auf 0,162 Amp. zurück, während die Potentialdifferenz auf 17 Volt stieg, und der Strom schlug nicht um. Nachdem 5 Minuten gewartet war, wurde der Hahn wieder geöffnet, der Strom stieg wieder auf 0,189 Amp. und schlug nach kurzer

Zeit um. Während der Strom umgeschlagen war, wurde der Hahn geschlossen, es stellte sich sehr bald der normale Strom 0,162 Amp. wieder her, trotzdem in dem umgeschlagenen Strom die Potentialdifferenz 34 Volt gewesen war. Der Versuch wurde mehrfach in derselben Weise und immer mit dem gleichen Erfolge wiederholt.

12. An den Drahtelectroden, an denen die Polarisation in dem Maasse wächst, dass der Stromumschlag eintritt, zeigt sich noch eine Reihe merkwürdiger Erscheinungen, welche zum Theil auch wohl schon von andern beschrieben sind.¹⁾ Die Erscheinungen sind wesentlich verschieden an der Kathode und an der Anode.

An der Kathode zeigen sich in der Regel sofort, sowie die Polarisation die Höhe erreicht hat, dass der Umschlag eintritt, kleine Fünkchen und zwar soweit es sich beurtheilen liess, stets dort wo der Draht aus dem Glase hervortritt. Wird die electromotorische Kraft verstärkt, so wird die Lichterscheinung intensiver und ausgedehnter, sodass die Electrode in ihrem unteren, der Einschmelzstelle näheren Theile von einem bläulichen Lichte umgeben erscheint, das aus schnell intermittirenden einzelnen Funken besteht.

Die Lichterscheinung umfasst bei den 3 mm und 5 mm Drähten, bei den kleineren liess es sich nicht so genau verfolgen, etwa die untern zwei Drittel der Electroden, an denen ein fortwährendes Hin- und Herwandern des Funkens stattfindet. Der Ausgangspunkt des Funkens scheint am unteren Ende des Drahtes zu sein, dort ist das Licht am hellsten. Die am oberen Ende des Drahtes sitzende Gasblase scheint die weitere Verbreitung des Funkens zu hindern, denn in dem Momente, in welchem die Gasblase abreisst, verbreitet sich die Lichterscheinung auch über das obere Drittel der Electrode.

Projicirt man vermittels electrischen Lichtes die Electrode auf einen weissen Schirm, so sieht man in der Flüssigkeit neben dem Theile des Drahtes an welchem der Funke

1) Die Litteratur darüber findet sich in Wiedemann's Electricitätslehre. 3. Aufl. 4 (2) §§ 1127/u. ff. Man sehe auch Richarz Sitzungsberichte der niederrheinischen Gesellschaft für Natur und Heilkunde, Sitzung vom 7. Juli 1890.

hin und her spielt, eine starke Bewegung der Flüssigkeit verbunden mit einer Schlierenbildung.

Erhöht man die Potentialdifferenz zwischen den Electroden weiter und weiter, wobei, wie wir sahen, keine Verstärkung des Reststromes eintritt, so tritt zunächst ein schwaches Rothglühen der Electrode ein, das allmählich heller und heller wird.

Eine Veränderung der Electrode selbst durch diese Erscheinungen liess sich bei der Untersuchung des Drahtes nach Unterbrechung des Stromes mit dem Mikroskope nicht erkennen, sie behielt ihre frühere Länge und Gestalt.

Anders verhält sich die Anode, wenn sie Ursache des Stromumschlages ist. Die längeren Electroden — an den 0,5 mm Electroden, trat die Erscheinung nicht in dem Maasse hervor — werden glühend, sowie die Potentialdifferenz der Electroden nur wenig die beim Grenzstrom herrschende überschreitet, das Glühen wird mit wachsender Potentialdifferenz stärker. Die entweichenden Gasblasen, man konnte das an den kürzesten Spitzen, bei welchen wie erwähnt das Glühen nicht merkbar auftrat, längere Zeit beobachten, geben bei dem Zerplatzen an der Oberfläche der Flüssigkeit einen weissen Rauch ab, der sich schwer über die Oberfläche der Flüssigkeit hinwälzt, aber rasch verschwindet. Es ist uns bisher nicht gelungen, Gas in hinreichender Menge aufzusammeln, um die Natur dieses weissen Rauches zu erkennen.

Während dieses Glühens der Electrode wird dieselbe allmählich zerstört. Wie dieser Vorgang in der Regel verläuft zeigen Fig. 19 und 20, welche durch Photographie erhaltene Abbildungen einer 5 mm langen Electrode geben, die genommen wurden, als der Strom kürzere Zeit Fig. 19, oder etwas länger Fig. 20 gewirkt hatte. Es sind dies Abbildungen der auf einen weissen Schirme projecirten Electrode.

Die untere grössere Hälfte der Electrode, jene Partie, neben welcher auch hier sich die lebhafteste Bewegung der Flüssigkeit und Schlierenbildung zeigt, wird dünner; das Dünnerwerden schreitet in einiger Entfernung von der Einsmelzstelle, bei Fig. 20 etwa in der Mitte, rascher vor und es erfolgt an dieser Stelle das Abbrechen. Als nach der Aufnahme von Fig. 20 der Strom wieder geschlossen wurde, brach der Draht sofort an dieser Stelle ab, es blieb nur der stark abgefressene

untere Theil stehen. In anderen Fällen trat das stärkere Abfressen des Drahtes noch an einer zweiten dem Glase näheren Stelle ein, sodass der Draht eine doppelte Einschnürung erhielt, wobei dann auch das Abbrechen des Drahtes an dieser unteren Stelle eintrat. In einzelnen Fällen wurde der obere Theil der Electrode wohl durch die sich rasch entwickelnden und losreissenden Gasblasen heftig herumgewirbelt, ehe er abbrach.

Eine der interessantesten Formen der Zerstörung der Anode zeigt Fig. 21. Nachdem eine kurze Zeit der Stromumschlag gedauert hatte, spaltete sich plötzlich die Electrode der ganzen Länge nach, der eine Theil war dabei korkzieherartig gewunden. An beiden Theilen, wie auch an andern Electroden, welche nur angefressen waren, zeigen sich warzenförmige oder kraterähnliche Gebilde, welche mit der Lupe auf der Originalphotographie zu Fig. 21 noch deutlich zu erkennen sind.

Wenn wir einen feinen Draht von oben her in die Flüssigkeit senkten, zu welchem Zwecke wir ein etwa 1 cm langes Stück eines Drahtes von 0,1 mm Durchmesser an eine Platinplatte angeschweisst hatten, und dem eingetauchten Stück eine solche Länge gaben, dass der Stromumschlag eintrat, so kam der Draht soweit zum Glühen, als er in die Flüssigkeit eintauchte und wurde als Anode bald in dieser Länge abgefressen; ausserhalb der Flüssigkeit trat niemals ein Glühen des Drahtes ein. Die ganze Erscheinung zeigt sich somit nur dort, wo der Strom aus dem Drahte in die Flüssigkeit übertritt, der Strom reicht nicht aus, um den Draht durch Joule'sche Wärme zum Glühen zu bringen.

12. Fassen wir die Erscheinung des Stromumschlages zusammen, so ergibt sich, dass bei einer gewissen, wesentlich von der Spitzenlänge, einigermaßen auch von der Leitungsfähigkeit der Lösung abhängigen Stromstärke, die Polarisation an einer der beiden Spitzen, oder nehmen wir die Versuchsanordnung als die einfachere, dass wir einer Spitze eine Platte gegenüberstellen, die Polarisation an der Spitze sowohl, wenn sie als Anode wie wenn sie als Kathode genommen wird, in so hohem Maasse wächst, dass nur mehr ein schwacher Strom durch die Zersetzungszelle geht. Der Grenzstrom, bei welchem der Umschlag beginnt, scheint nicht wesentlich verschieden zu

sein, sei es, dass die Spitze als Anode oder als Kathode genommen wird. Der durch Wachsen der Wasserstoffpolarisation bewirkte Reststrom hängt für eine gegebene Spitze nicht ab von der äusseren electromotorischen Kraft, er blieb z. B. ungeändert als bei einer 5 mm langen Spitze in einer 10 proc. Schwefelsäurelösung die Potentialdifferenz zwischen den Electroden von 62 Volt auf 84 Volt stieg; derselbe ist unabhängig ferner von der Concentration, also der Leitungsfähigkeit der Lösung, oder wenigstens nur in sehr geringem Maasse davon abhängig, wie die Zusammenstellung am Schluss von § 10 erkennen lässt. Derselbe hängt dagegen wesentlich von der Länge der Spitzen ab, sodass er mit wachsender Spitzenlänge beträchtlich zunimmt; für die 3 mm langen Spitzen ergibt sich im Mittel aus der Zusammenstellung des § 10 der Werth 0,0911 Amp. für die 5 mm Spitze 0,1833 Amp. fast genau das Doppelte. Für die 0,5 mm Spitze lässt sich der Reststrom nicht mit Sicherheit angeben, da durch das Abreissen der Gasblasen von der Spitze zu grosse Stromschwankungen eintreten.

Eine Beobachtung des Reststromes, wenn die Sauerstoffpolarisation die Ursache des Stromumschlages ist, für eine bestimmte Spitzenlänge, lässt sich nicht durchführen, da die Drahtelectroden als Anoden zerstört, zerstäubt werden; die beiden vor der merkbaren Zerstäubung in einer 10 proc. Lösung mit den 3 mm und 5 mm langen Spitzen gemachten Beobachtungen zeigen, dass dort der Reststrom erheblich stärker war, als bei der Wasserstoffpolarisation, bei der 3 mm langen Spitze hatte der Strom die doppelte Stärke. Die Drahtanode glühte stark und wurde rasch zerstört.

Die Entwicklung des Gases an der Kathode wie an der Anode findet in der beschriebenen Weise in einzelnen Blasen statt, das Abreissen der Blase bewirkt eine kurz dauernde Verstärkung des Stromes.

Dem Verständniss dieser Erscheinungen bietet ihre grosse Complication eine grosse Schwierigkeit und wir gestehen offen, dass es uns noch nicht möglich ist den inneren Zusammenhang derselben zu erkennen. Die nächstliegende und scheinbar einfachste Deutung der Erscheinung würde die sein, dass sich durch den Grenzstrom eine Gasschicht oder Dampfschicht um die betreffende Electrode legt, welche einen sehr starken

Ueber
Hr. P
die P
gleich
der L
bilde
und d
des p
das
Wär
ist,
Auff
grup
strom
dem
bei p
mit
nich
inde
tritt
sche
von
ders
des
neh
stan

solc
die
con
des
disc
wä
folg
bei
erf
das
me
das

Uebergangswiderstand bewirkt. Diese Annahme macht auch Hr. Richarz in der vorher erwähnten Mittheilung, indem er die Erscheinung mit dem Leidenfrost'schen Phänomen vergleicht. Er meint durch die Erwärmung in der Grenzschicht der Electroden werde eine Dampfhülle um die Electroden gebildet, diese würde dann durch den Reststrom electrolysirt, und die bei dem Stromdurchgange durch die Dampfhülle wegen des grossen Widerstandes erzeugte Wärme sei hinreichend um das Phänomen constant zu erhalten. Je grösser die erzeugte Wärmemenge oder je stärker *cet. par.* die Stromintensität ist, um so stabiler müsse die Erscheinung sein. Dass diese Auffassung zu einem Verständniss der ganzen Erscheinungsgruppe nicht genügt, ergeben unsere Messungen. Der Reststrom hat schon dann, wenn er vorerst noch alternirend mit dem Grenzstrom auftritt, gleich dieselbe Stärke, welche er auch bei grösserer electromotorischer Kraft behält; tritt er zusammen mit dem Grenzstrom auf, so ist aber die Erscheinung noch nicht stabil, sondern es tritt ein Wechsel der Erscheinung ein, indem der Umschlag wieder rückgängig wird und wieder eintritt; ohne Zunahme der Stärke des Reststromes wird die Erscheinung mit wachsender electromotorischer Kraft stabil. Die von Hrn. Richarz angenommene Dampfschicht bez. der in derselben vorhandene Widerstand müsste wegen der Constanz des Reststromes der electromotorischen Kraft proportional zunehmen, ohne dass sich in der Flüssigkeit, da der Strom constant ist, irgend etwas ändern kann.

Man könnte bei Festhaltung der Auffassung, dass ein solcher Widerstand die Ursache der Stromschwächung sei, auf die Vermuthung kommen, dass der Zustand überhaupt kein constanter sei, dass wir es vielmehr, wie bei dem Auftreten des Reststromes zusammen mit dem Grenzstrom mit einem discontinuirlichen Stromdurchgang zu thun hätten, dass nur, während bei dem Grenzstrom der normale Strom und der infolge der Dampfschicht geschwächte Strom langsam abwechseln bei zunehmender electromotorischer Kraft der Wechsel so rasch erfolgt, dass das Galvanometer einen festen Stand zeigt, und dass auch an der Electrometernadel die Schwankungen nicht mehr bemerkbar sind. Dem steht aber zunächst entgegen, dass wenn bei dem Grenzstrom der Umschlag eintritt, der

Reststrom schon ganz dieselbe Stärke zeigt, wie der spätere Reststrom. Weiter aber zeigt das Telephon eine solche Discontinuität nicht an. Wie vorhin schon erwähnt wurde, war das Rauschen des Telephons nach dem Stromumschlag zwar etwas lauter, der Charakter des Geräusches bleibt indessen derselbe; wäre ein solch schnelles Wechseln des innerhalb so weit auseinanderliegender Grenzen der Stromstärke veränderlichen Stromes vorhanden, so müsste das Telephon einen bestimmten lauten Ton geben.

Wir wollen indess keineswegs läugnen, dass die Erscheinung zum Theil durch eine die Electroden umgebende Dampföhle oder viel wahrscheinlicher eine Gashöhle bedingt oder eingeleitet wird; an der Kathode kann man ja direct diese Gashöhle durch die Funken-Entladung wahrnehmen, dass aber diese Gasschicht nicht das wesentlich bedingende der Erscheinung ist, ergibt sich auch daraus, dass die hohe Polarisirung bez. der Stromumschlag immer nur an *einem* Pole auftritt, dass an der Anode sofort die Polarisirung herabgeht, wenn sie an der Kathode steigt und umgekehrt.

Einen sehr interessanten Versuch in dieser Beziehung haben wir am 23. Januar d. J. gemacht. Wir benutzten die schon vorhin erwähnten an Platinplatten angeschweissten Drähte. Dieselben waren in 42 proc. Lösung eingetaucht. Zunächst war die Kathode tiefer eingetaucht als die Anode. Mit 44 Elementen wurde die Anode glühend und zeigte eine Polarisirung von 72,76 Volt. Es wurde nun die Kathode etwas aus der Flüssigkeit herausgezogen, ohne die in der anderen Electrodenzelle befindliche Anode zu berühren. Als die Kathode eine gewisse Strecke gehoben war, wurde diese glühend und sofort ging an der Anode die Polarisirung auf 3,4 Volt herab, das Glühen hörte auf, sie verhielt sich wie immer, wenn an der Kathode der Umschlag von vornherein eingeleitet war. An der glühenden Kathode war die Polarisirung 65,7 Volt. Als nun durch Herausziehen der Anode diese wieder glühend gemacht wurde, erlosch sofort die Kathode und die Polarisirung an derselben wurde 2 Volt.

Wir müssen aus dieser Beobachtung schliessen, dass der Reststrom nicht unter eine für eine Spitze von gegebener Länge in gegebener Lösung bestimmte Stärke herabgehen darf,

damit
bedin
Kath
wächs
wider
desha
dem
wird
hört
hinre
klein

suche
soebe
Wid
strom
der
muss
vorh
dies

zeig
Lich
sche
Koh
finde
aus
bei
Ene
stäu
die
an
nah
gefi
dort
zum

Ers
nich

damit an dieser Spitze der Zustand, welcher den Umschlag bedingt, erhalten bleibt. Denn durch das Herausziehen der Kathode, wenn der Zustand an der Anode vorhanden ist, wächst wegen des an der Kathode vorhandenen Uebergangswiderstandes in normaler Weise die Polarisation an derselben, deshalb nimmt der Werth der die Stromstärke auch nach dem Umschlag bedingenden Differenz $D - p$ ab, der Reststrom wird geschwächt, sinkt er unter einen bestimmten Werth, so hört der Zustand an der längeren Anode auf. Ist die Kathode hinreichend verkleinert, so reicht der Reststrom für die verkleinerte Kathode aus, und der Umschlag tritt dort ein.

Der gleiche Schluss ist aus dem im § 11 beschriebenen Versuche zu ziehen. Dort war für die Spitze der Grenzstrom soeben überschritten, der Umschlag war eingetreten, als der Widerstand zwischen den Electroden klein war, und der Reststrom reichte aus, um die Erscheinung zu erhalten. Als nun der Widerstand zwischen den Electroden vergrößert wurde, musste der Reststrom gerade so an Stärke abnehmen, wie es vorher für den normalen Strom beobachtet war; die Folge dieser Abnahme war das Rückgängigwerden des Umschlages.

Die an der Electrode selbst beobachteten Erscheinungen zeigen eine grosse Analogie mit dem Verhalten des electrischen Lichtbogens an der Anode, mit den Entladungen in Geissler'schen Röhren an der Kathode. Wie wir an der positiven Kohle den Potentialsprung an der Austrittsstelle des Stromes finden, so wird auch hier an der Uebertrittsstelle des Stromes aus der Electrode in die Flüssigkeit der Sprung stattfinden; bei wachsender electromotorischer Kraft wächst die disponible Energie, diese wird zu dem stärkeren Glühen und zur Zerstäubung der Spitze aufgebraucht. An der Kathode macht die leuchtende Gasschicht ganz den Eindruck des Glimmlichtes an den Kathoden der Geissler'schen Röhren, es liegt daher nahe, den Potentialsprung an der Kathode mit dem Kathodengefälle zu parallelisiren, um so mehr, da auch hier gerade wie dort bei hinreichend vermehrter Energie die Kathode selbst zum Glühen kommt.

Wir wollen mit diesen Bemerkungen nur auf verwandte Erscheinungen hinweisen, über welche man sich ja auch noch nicht klar ist, wir hoffen aber durch weitere Untersuchungen

dem Verständniss noch etwas näher zu kommen. Es möge hier nur noch darauf hingewiesen werden, dass das Auftreten der warzenförmigen, resp. kraterähnlichen Gebilde an den Anoden auch auf das Wiederhervortreten occludirten Gases hinzudeuten scheint, welches etwa bei der Einleitung des Umschlages von der Anode aufgenommen war.

13. Nachdem die Erscheinungen des Stromumschlages an Platindrähten beobachtet waren, gingen wir dazu über, sogenannte unpolarisirbare Electroden nach derselben Richtung hin zu untersuchen. Wir wählten Zink in gesättigter Lösung von Zinkvitriol und Kupfer in gesättigter Lösung von Kupfervitriol. Schon die ersten im Herbst 1890 von uns angestellten Versuche ergaben, dass sich an den Anoden ähnliche Erscheinungen zeigten, wie an den Platinelectroden in Schwefelsäure, während an den Kathoden ein solches sprungweises Wachsen der Polarisation nicht eintrat.

Drähte als Anoden wurden selbstverständlich bald verzehrt, wir benutzten deshalb zu diesen Versuchen Zinkstäbe, welche zuweilen unten konisch zugespitzt waren und Kupferstreifen, denen man unten die Form eines spitzen Dreiecks gegeben hatte. Das Zink war reinstes Zink aus der Trommsdorff'schen Fabrik, das Kupfer electrolytisch dargestellt von Dr. Langbein in Leipzig, das Zinksulfat und Kupfersulfat war als reinstes Salz von Merck in Darmstadt bezogen. Die Versuche wurden im übrigen so durchgeführt wie die früheren, nur wurden die Anoden an einer Mikrometerschraube befestigt, so dass man sie von oben innerhalb gewisser Grenzen beliebig tief in die Flüssigkeit eintauchen konnte. Da es sich von Anfang an herausstellte, dass die Erscheinungen an der Anode die wesentlichen waren, wurden hauptsächlich diese beobachtet.

Das charakteristische der Erscheinung ist folgendes. Wendet man eine hinreichende Stromdichte an, so ist zunächst nach Stromschluss die Polarisation klein, dieselbe fängt dann allmählich an zu wachsen, zunächst langsam, bald wird das Wachsen ein schnelleres und nach einiger Zeit, die bei grösserer Stromdichte kleiner ist, geht die Nadel des Electrometers wie durch einen plötzlichen Stoss heraus, sodass also die Polarisation plötzlich einen grossen Werth annimmt. Gleichzeitig findet an der Anode eine lebhafte Gasentwicklung statt. In

den meisten Fällen nimmt die zuerst erreichte grosse Polarisation wieder etwas ab, bleibt aber eine grosse von mehreren Volts oder schwankt unter Umständen in weiten Grenzen.

Diese „grosse“ Polarisation entwickelt sich um so rascher, je dichter der Strom ist, bei zu geringer Stromdichte scheint sie nicht einzutreten. Man kann sie aber an selbst recht grossen Electroden dadurch hervorrufen, dass man die Electrode zuerst erheblich verkleinert, die Polarisation an der verkleinerten Electrode sich entwickeln lässt und darauf die Electrode allmählich oder auch rasch wieder durch tieferes Einsenken vergrössert. Es kann demnach eine kleinere Stromdichte die Erscheinung dadurch hervorrufen, dass man sie vorher, wenn auch nur an einem kleineren Theil der Electrode, durch grössere Stromdichte hervorgerufen hat.

14. Zinkelectroden in Zinkvitriol.

Wir beschreiben zunächst einige Versuche, welche den Verlauf der Erscheinungen an reinen Zinkstäben näher characterisiren.

Ein Zinkkegel von etwa 30 mm Seitenlänge und 7 mm Basisdurchmesser wurde ganz, also mit etwa 300 qmm Oberfläche als Anode eingetaucht, als Kathode diente ein Zinkstab gleichen Durchmessers auf etwa 6 cm eingetaucht. Als ein Strom von 6 Elementen geschlossen wurde, fand sich

$$p_a = 0,106 \text{ Volt}, p_k = 0,071 \text{ Volt}, D = 10,79 \text{ Volt}, \\ i = 0,029 \text{ Amp.}, W = 366 \text{ Ohm.}$$

Die Polarisation der Electrode änderte sich längere Zeit nicht; es wurden 12 Elemente geschlossen, es fand sich

$$p_a = 0,244 \text{ Volt}, p_k = 0,099 \text{ Volt}, D = 21,23 \text{ Volt}, \\ i = 0,057 \text{ Amp.}, W = 368 \text{ Ohm.}$$

Auch jetzt blieb die Polarisation längere Zeit constant. Als dann die Anode emporgehoben wurde, sodass nur noch eine kurze Spitze eintauchte, stieg die Polarisation an der Anode auf einen der Potentialdifferenz nahen Werth; als nach kurzer Zeit der ganze Kegel wieder eingesenkt wurde, nahm die Polarisation allerdings ab, blieb aber sehr gross. Der Versuch musste unterbrochen werden. Als am anderen Morgen der Strom (von derselben Stärke) wieder geschlossen wurde,

war zunächst die Polarisation an der Anode klein, es trat aber sofort ein erst langsames, dann rascheres Wachsen ein und nach 10 Minuten entwickelte sich die grosse Polarisation.

Ein frischer Zinkkegel, bis zu einer solchen Tiefe eingesenkt, dass die eintauchende Oberfläche etwa 150 qmm betrug, ergab bei Schluss des Stromes 0,057 Amp. zunächst wieder die Polarisation von 0,2 Volt, nach 20 Minuten war dieselbe auf 0,45 gewachsen, nach weiteren 10 Minuten stieg die Polarisation plötzlich auf 3,7 Volt, wobei lebhaft Gasentwicklung an der Anode eintrat. Nach Unterbrechung des Stromes ging die Nadel des Electrometers sofort auf Null, so dass eine *bleibende* Polarisation nicht zu erkennen war.

Nachdem die doppelte Zinkfläche eingetaucht war, wurde der Strom wieder geschlossen; die anfängliche Polarisation war 0,24 Volt, schon nach 8 Minuten trat jetzt die grosse Polarisation ein; dieselbe war eine kurze, zur Messung hinreichende Zeit, 10 Volt, nahm aber stetig ab und ging zurück auf 3,9 Volt.

Mit diesen und anderen Spitzen wurden vielfache Versuche angestellt, um zu erkennen, ob sich etwa auf der Oberfläche des Zinks eine nichtleitende Schicht bildete, welche die Ursache der Potentialdifferenz zwischen Metall und Flüssigkeit wäre. Es wurde deshalb die Flüssigkeit kräftig gerührt, dabei trat wohl ein kleines Schwanken der Polarisation ein, aber eher eine Vergrößerung als eine Verkleinerung. Die Zinkelectrode wurde mit Fliesspapier abgewischt, es trat ebenfalls ein Schwanken der Polarisation ein, das aber nur kurze Zeit dauerte. Die Electrode wurde während des Stromdurchganges mit scharfer Glaskante abgekratzt, auch das hatte nur eine Schwankung der Polarisation und eher eine Zunahme als eine Abnahme der Polarisation zur Folge. Die Electrode wurde aus der Flüssigkeit herausgenommen, mit Wasser abgewaschen und auch mit Schmirgelpapier abgerieben, die Wirkung dieser Maassnahmen war keine andere als diejenige einer etwa die gleiche Zeit dauernden Stromunterbrechung; gerade wie es bei einer solchen mehrere Minuten dauerte bis die grosse Polarisation sich wieder entwickelte, so auch nach dem Abspülen und Abschmirgeln der Electrode.

Auch eine Umkehr der Stromrichtung, durch welche die

Anode einige Zeit zur Kathode gemacht wurde, hatte keinen merklichen Einfluss auf den Verlauf der Erscheinung. Als z. B. bei Benutzung des zweiten Zinkkegels der Strom umgekehrt wurde, ging die Nadel sofort auf die andere Seite und zeigte eine Wasserstoffpolarisation von 0,2 Volt an, sodass das Vorhandensein einer nichtleitenden Schicht an dem Zinkstabe nicht angenommen werden kann, da dann eine allmähliche Abnahme der anfangs stärkeren Wasserstoffpolarisation sich hätte zeigen müssen.

Als der Strom wieder in der früheren Richtung hindurch gesandt wurde, trat die grosse Polarisation gerade so wieder ein, wie wenn der Strom eine Zeit lang unterbrochen gewesen wäre. Bei längerer Dauer des umgekehrten Stromes und geringer Stromdichte dauerte es längere Zeit, bei kürzerer Dauer und grösserer Stromdichte kürzere Zeit, bis das plötzliche starke Anwachsen der Polarisation eintrat.

Die Zeit, während welcher der Strom geschlossen sein muss, ehe die grosse Polarisation eintritt, hängt wesentlich von der Stromdichte ab. Unter anderem zeigt das folgender Versuch. Ein Zinkstab wurde bis zu einer Tiefe von etwa 30 mm eingetaucht und ein Strom von 0,05 Amp. geschlossen. Nach einer Stunde zeigte sich noch keine Zunahme der Polarisation, welche gleich nach Stromschluss 0,16 Volt war. Als der Strom auf 0,104 Amp. verstärkt wurde, wurde die Polarisation 0,29 Volt, stieg nach 10 Minuten auf 0,40 Volt, nach weiteren 5 Minuten auf 0,54 Volt und 4 Minuten später trat unter lebhafter Gasentwicklung an der Anode die grosse Polarisation ein, die sich nach einigen Schwankungen zu 3,4 Volt ergab; der Strom war dabei auf 0,098 Amp. zurückgegangen. Die Wasserstoffpolarisation an der Kathode hatte nur von 0,16 Volt bei 0,05 Amp., auf 0,24 Volt bei 0,1 Amp. zugenommen. Vier nebeneinander befestigte leitend verbundene Zinkstäbe wurden als Anode benutzt, jeder tauchte mit einer Oberfläche von etwa 800 qmm ein, sodass die gesammte Fläche, welche eintauchte, etwa 3200 qmm war. Es wurde einen Nachmittag und einen Vormittag ein Strom von wachsender Stärke, zuletzt eine Stunde lang ein Strom von 0,4 Amp. angewandt. Die Polarisation blieb immer eine geringe, sie nahm zu von 0,11 Volt bei einem Strom von 0,1 Amp. zu bis 0,33 Volt bei

0,4 Amp., die grosse Polarisation trat nicht ein. Als diese selbe Anode aber einige Zeit nachher zu später zu besprechenden Versuchen in der Voraussetzung, dass sie unpolarisierbar sei, zwei Tage mit zunehmenden Stromstärken benutzt wurde, trat, nachdem die Stromstärke 0,4 nur kurze Zeit gedauert hatte, auch an dieser Electrode die grosse Polarisation ein; es zeigte sich plötzlich lebhaft Gasentwicklung und nach einigem Schwanken zeigte die Polarisation den Werth 7,8 Volt. Als der Strom jetzt auf 0,15 Amp. geschwächt wurde, ging die Polarisation vollständig zurück; als nach einer Unterbrechung des Stromes während 2 Stunden derselbe Strom von 0,15 Amp. wieder geschlossen wurde, blieb die Polarisation dauernd klein, als aber nach einer halbstündigen Dauer dieses Stromes derselbe auf 0,4 verstärkt wurde, entwickelte sich in 3 Minuten die grosse Polarisation. Dieselbe war anfangs über 30 Volt (als Stromquelle war eine Dynamomaschine von 110 Volt Klemmspannung benutzt), ging dann aber stetig zurück, sodass sie nach 5 Minuten nur noch 10 Volt war, und nahm noch weiter ab. Als nun der Strom wieder auf 0,15 Amp. gebracht wurde, ging die Polarisation sofort auf 0,16 Volt zurück, nahm aber gleich wieder zu, war nach 5 Minuten 0,48 Volt und wuchs plötzlich sehr stark, ohne aber einen festen Werth anzunehmen, die Nadel des Electrometers schwankte während 10 Minuten in bald engeren, bald weiteren Grenzen hin und her. Eine Wiederholung des Versuches gab dasselbe Resultat, im Tagebuch ist bemerkt, von 5^h 45^m bis 6^h wogt die Nadel hin und her.

Dieses Schwanken der grossen Polarisation bei Stromdichten, welche zu gering sind, um selbst ohne Vorbereitung des Stabes durch grössere Stromdichte die grosse Polarisation hervorzurufen, werden wir beim Kupfer wieder finden und dort die Erscheinung genauer besprechen.

15. Die grosse Polarisation der Zinkanode hängt unter sonst gleichen Umständen ab von der Stärke des Stromes und der Grösse der Anode. Es scheint indess, dass die Polarisation an einer Fläche bestimmter Grösse bei bestimmter Stromstärke doch nicht eine ganz bestimmte ist, dass sie vielmehr grösser ist, wenn sie unmittelbar vorher durch grosse Stromdichte eine erheblich grössere war, wenigstens dauert es

dann sehr lange, wenn man den Strom schwächt, bis die Polarisation auf den diesem Strome entsprechenden früher beobachteten Werth zurückgeht. Trotz einer äusserst grossen Anzahl von Versuchen ist es uns nicht gelungen, in diesem Punkte klar zu sehen. Um indess einigermaassen die Abhängigkeit der Polarisation von der Grösse der Electrodenfläche und der Stromstärke zu übersehen, wurde ein Zinkstab als Anode benutzt, dessen Durchmesser 7 mm war. Derselbe wurde zunächst bis zu einer Tiefe von 42 mm in die Zinklösung eingetaucht und Ströme, die von 0,05 bis 0,4 Amp. stiegen, angewandt. Die eingetauchte Fläche betrug etwa 960 qmm. Waren die diesen Strömen entsprechenden Polarisationen beobachtet, so wurde der Zinkstab herausgezogen, sodass die eintauchende Oberfläche noch 500—250—140 qmm betrug, und jedesmal in gleicher Weise die Polarisation gemessen. Als Kathode diente ein Zinkstab gleicher Dicke, der stets bis zur gleichen Tiefe von etwa 45 mm eingetaucht war.

Als Stromquelle diente eine Dynamomaschine von 110 Volt Klemmspannung, durch Widerstände wurde die Stromstärke so regulirt, dass die Ströme die angegebene Stärke hatten, wenn die grosse Polarisation eingetreten war.

Electrodenfläche 960 qmm.

Strom in Amp.	0,06	0,1	0,2	0,3	0,4
Anodenpolarisation in Volt	bleibt klein	3,09	3,43	3,79	4,01

Electrodenfläche 500 qmm.

Strom in Amp.	0,0575	0,1	0,2	0,3	0,4
Anodenpolarisation in Volt	3,19	3,30	3,73	4,51	5,13

Electrodenfläche 250 qmm.

Strom in Amp.	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4
Anodenpolarisation in Volt	3,09	3,49	4,29	5,21	5,90
Kathodenpolarisation in Volt	0,14	0,24	0,46	0,68	0,85

Electrodenfläche 140 qmm.

Strom in Amp.	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4
Anodenpolarisation in Volt	3,35	3,92	5,77	6,37	7,20
Kathodenpolarisation in Volt	0,14	0,24	0,45	0,61	0,80

Schliesslich wurde nur die untere Basis des Stabes zur Berührung mit der Flüssigkeit gebracht, wobei infolge capillaren Ansteigens der Flüssigkeit noch etwa 2 mm der Mantelfläche von der Flüssigkeit benetzt wurden. Die grosse Polarisation trat stets sehr schnell nach dem Stromschlusse ein und zeigte

zuerst einen erheblich grösseren als den endlichen Werth, auf welchen sie langsam zurückging. Als schliesslicher Werth wurde der angenommen, welcher während einiger Minuten nicht mehr merklich abnahm.

Die gefundenen Werthe sind:

Strom in Amp.	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4
Anodenpolarisation in Volt	4,96	5,90	7,03	8,14	9,04

Alle diese Zahlen zeigen ein der Stromstärke proportionales Wachsthum, für jede Grösse der Oberfläche lassen sich die Werthe p_a darstellen durch eine Gleichung

$$p_a = a + b \cdot i,$$

worin a bis zur dritten Reihe (250 qmm Oberfläche) merklich denselben Werth 2,7 hat bei 140 qm Oberfläche auf 2,9 und bei der kleinsten Fläche auf 4,6 wächst; b nimmt von 3,4 bei der grössten Fläche auf 6,1 — 8 — 11 — 11,4 bei den folgenden Flächen zu.

Gleiche Regelmässigkeit der Zahlen ergab sich nur selten, besonders bei kegelförmig zugespitzten Zinkstäben ergaben sich mehrfach für gleiche Flächengrössen erheblich stärkere Polarisationen; worin das lag, haben wir noch nicht aufklären können.

16. Die im vorigen Paragraphen für die Kathodenpolarisation angegebenen Werthe zeigen ebenfalls eine Zunahme mit der Stromstärke, ohne dass indess hier jemals ein sprungweises Wachsen, wie an der Anode das Eintreten der „grossen“ Polarisation, gefunden wurde. Wir haben deshalb auch die Abhängigkeit der Kathodenpolarisation von der Grösse der eintauchenden Fläche und der Stromstärke zu bestimmen versucht. Als Anode diente der schon früher erwähnte vierfache Zinkstab, da wir voraussetzten, dass derselbe die grosse Polarisation nicht annehmen würde. Da derselbe schliesslich nach längerer Versuchsdauer bei Anwendung eines Stromes von 0,4 Amp. die grosse Polarisation annahm, haben wir die Zunahme der Kathodenpolarisation nur bis 0,3 Amp. verfolgt. Als Kathode wurde ein cylindrischer Zinkstab von 7 mm Durchmesser benutzt und die Beobachtung, um den Einfluss des durch die starken Ströme eintretenden Zinkabsatzes möglichst zu vermeiden, so geführt, dass mit dem schwächsten Strome

begonnen und bei jedem Strome der Stab nach und nach herausgezogen wurde, bis zuletzt nur wesentlich die untere Fläche des Stabes und der Theil des Mantels, bis zu welchem die Flüssigkeit capillar anstieg, mit der Flüssigkeit in Berührung war. Nach der Beobachtung des Stromes 0,2 Amp. wurde der Zinkstab frisch abgeschmirgelt, weil sich am unteren Rande ein Kranz von Zinknadeln angesetzt hatte.

Eintauchende Fläche 1360 qmm 700 qmm 370 qmm 150 qmm 50 qmm							Polaris.
Kathodenpolarisation							d. Anode
Strom 0,05 Amp.	0,07	0,12	0,20	0,39	0,73		0,040
" 0,1 "	0,12	0,21	0,38	0,67	1,03		0,068
" 0,2 "	0,23	0,41	0,64	1,13	2,49		0,094
" 0,3 "	0,39	0,63	1,19	1,81	4,37		0,19

Sehen wir von der Reihe für 50 qmm eintauchende Fläche ab, so nimmt für jede Fläche die Polarisation der Stromstärke proportional zu, für die drei grösseren Flächen lässt sich dieselbe sogar darstellen durch $p_k = a \cdot i$. Bei annähernd gleicher Stromdichte ist die Kathodenpolarisation ebenso annähernd die gleiche.

17. Ein ganz eigenthümliches Verhalten zeigten amalgamirte Zinkelectroden als Anoden. Es wurde ein amalgamirter Zinkkegel von etwa 350 qmm Fläche als Anode genommen und ein Strom von 0,055 Amp. geschlossen. Die Anodenpolarisation war gleich nach Stromschluss 0,32 Volt; dieselbe nahm anfangs sehr langsam zu, nach 23 Minuten ging die Electrometernadel plötzlich aus der Scala, kehrte aber ebenso schnell zu Null zurück, stand dort 30 Secunden und ging wieder schnell aus der Scala, dann auf Null und dann wieder aus der Scala und ging darauf auf den Theilstrich 80, einer Polarisation von etwa 4 Volt entsprechend und schwankte um diesen Werthe längere Zeit. Abwischen der Anode mit Fliesspapier, wodurch die Amalgamirung wieder gleichmässiger wurde, lässt das Spiel von neuem eintreten.

An einem anderen amalgamirten Zinkstab dauerte es wiederum etwa 20 Minuten bis sich die grosse Polarisation entwickelte, dann aber zeigte sich ganz dasselbe Spiel, es wurde neunmal nach der Reihe die Zunahme und Abnahme der Polarisation beobachtet, ohne dass eine Verlangsamung der Bewegungen eintrat.

Der Rückgang der Electrometernadel zum Nullpunkt ist

meist kein stetiger, die Nadel geht mehr oder weniger zurück, bleibt dann kurze Zeit stehen oder geräth selbst, bevor sie weiter zurückgeht, in ein kleines Schwanken. Verstärkung des Stromes bewirkt im allgemeinen einen rascheren Verlauf der Erscheinung, die Bewegungen werden lebhafter.

An der Anode zeigt sich jedesmal, wenn die Polarisation in der angegebenen Weise in die grosse übergeht, die Nadel also mit grosser Geschwindigkeit sich von der Nulllage entfernt, eine lebhafte Gasentwicklung; während derselben rieselt von der Anode ein graues Pulver nieder. Es macht den Eindruck, wie wenn eine grosse Menge occludirten Gases plötzlich aus dem Stabe hervorbräche und dabei die oberflächlichen Schichten des Stabes abstosse. Das Pulver wurde mit einem Glaslöffel aufgefangen; es zeigte sich dann etwas gelblich gefärbt; es gab sich als Amalgam zu erkennen, denn wenn man Gold mit dem Pulver rieb, so wurde dasselbe amalgamirt.

Ob die Gasentwicklung und das Niederfallen des Pulvers der starken Zunahme der Polarisation vorausgehen, oder ob es gleichzeitig ist, sodass etwa das Abstossen der oberflächlichen Schicht die Ursache ist, dass die Polarisation plötzlich wieder abnimmt, ist schwer zu sagen, wir haben zu einer Entscheidung noch nicht kommen können. Nur sei bemerkt, dass, wenn nach mehrfachem Hin- und Herwogen der Polarisation sich eine Zeit lang eine gewisse grosse Polarisation hält, und man unterbricht auf kurze Zeit den Strom, dass dann jedesmal, wie bei dem reinen Zink, nach neuerem Stromschluss die Polarisation den kleinen Werth der normalen Sauerstoffpolarisation hat.

18. Die Erscheinungen an den Kupferanoden verlaufen zwar im ganzen und grossen wie bei den Zinkelectroden, zeigen im einzelnen jedoch erhebliche Verschiedenheit. Das Gemeinsame ist das Eintreten der grossen Polarisation nach längerer oder kürzer Zeit, je nach der Dichte des erregenden Stromes, ferner die Erregung der grossen Polarisation durch eine geringere Stromdichte, wenn sie vorher an einem Theile der Anode durch grössere Stromdichte hervorgerufen war. Ebenso ist das Auftreten der grossen Polarisation von einer lebhaften Gasentwicklung begleitet, sodass sich das Gas um das Kupferblech dort, wo dasselbe die Oberfläche der Flüssigkeit schneidet, als ein Gaskranz herumlegt. Auch hier macht es den Ein-

druck, als wenn vorher occludirtes Gas aus dem Metall hervorbräche, ja zuweilen schien es, als wenn oberflächliche Theile des Kupfers abgerissen würden; es ist im Beobachtungstagebuch einmal vermerkt, dass nach dem Hervorbrechen des Gases feine Kupferspäne auf der Flüssigkeit schwammen.

Abweichend von Zink zeigt sich, dass der Werth der Anodenpolarisation in viel geringerem Grade von der Stromstärke, bez. Stromdichte abhängig ist, und weiter, dass dieselbe, wie es scheint, nur innerhalb gewisser Grenzen der Stromdichte einen constanten Werth annimmt. Ferner sind die Werthe der Anodenpolarisation bei Kupfer erheblich grösser als bei Zink.

Die Kathodenpolarisation wächst ebenso wie bei Zink und Zinkvitriol mit der Stromdichte und hat ähnliche Werthe, so fand sich bei einem Strome 0,18 Amp. und etwa 900 qmm eingetauchter Fläche die Kathodenpolarisation 0,351 Volt, bei 450 qmm eingetauchter Fläche 0,61 Volt, bei 335 qmm 1,44 Volt, und als nur die Kante des rechteckigen Kupferstreifens in einer Länge von 12 mm mit der Flüssigkeit in Berührung war, 3,55 Volt.

Um den Gang der Erscheinung an der Kupferanode übersichtlich zu machen, möge eine Beobachtung etwas ausführlicher beschrieben werden. Es wurde ein Kupferdreieck von 40 mm Höhe, 12 mm Grundlinie, also 480 qmm Oberfläche mit der Spitze nach unten als Anode in die Flüssigkeit getaucht, als Kathode ein viereckiger Kupferstreifen, 12 mm breit, 40 mm tief, eingetaucht. Als ein Strom von 0,0497 Amp. geschlossen wurde, war die Potentialdifferenz der Electroden $D = 16,39$ Volt, die Polarisation an der Anode $p_a = 0,124$ Volt, an der Kathode $p_k = 0,126$ Volt. Für den Widerstand der Kupferlösung ergibt sich daraus $W = 325$ Ohm.

Während 40 Minuten nahm die Anodenpolarisation nicht merklich zu, der Strom wurde deshalb auf 0,108 Amp. verstärkt; gleich nach dieser Verstärkung war die Anodenpolarisation 0,42 Volt, nach 4 Minuten trat dann bei lebhafter Gasentwicklung an der Anode ein plötzliches Wachsen der Polarisation ein, sodass die Electrometernadel weit über die Grenzen der Scala abgelenkt wurde. Die Polarisation liess aber sofort nach und sank auf 17 Volt, welcher Werth einige Zeit dauerte.

Eine Verstärkung des Stromes auf 0,2 Amp. liess die Polarisation erheblich wachsen, sie stieg auf 59 Volt, stand dann kurze Zeit bei etwa 50 Volt und ging zurück auf 17 Volt und schwankte einige Zeit zwischen 17 und etwa 25 Volt, ohne einen constanten Werth anzunehmen.

Bei einem anderen Dreieck der gleichen Grösse genügte der Strom 0,1 nicht, um die grosse Polarisation hervorzubringen, es wurde deshalb das Kupferdreieck so hoch emporgezogen, dass nunmehr 270 qmm eintauchten. Nach etwa 10 Minuten entwickelte sich die grosse Polarisation, stieg zunächst bis etwa 40 Volt und ging ziemlich schnell bis etwa 19 Volt zurück, um welchen Werth sie schwankte.

Die Schwächung des Stromes auf den halben Werth bewirkte ein Zurückgehen der Polarisation auf den Werth von etwa 0,3 Volt; die Polarisation nahm aber bald in der geschilderten Weise zu und stieg auf etwa 15 Volt. Einsenken des Kupferdreiecks bis zu seiner Grundlinie liess die Polarisation sofort bis 0,23 Volt zurückgehen; dieselbe wuchs indess bald, nahm aber lange keinen constanten Werth an, sondern schwankte zwischen grosser und kleiner Polarisation, eine Zeit lang den Werth 13,1 Volt zeigend.

Diese und andere Versuche führten zu der Vermuthung, dass die grosse Polarisation einen bestimmten Werth unterhalb einer gewissen Stromdichte und oberhalb einer gewissen anderen Stromdichte nicht annimmt, und dass zwischen diesen Grenzen die Polarisation nicht erheblich von der Stromdichte abhängt.

Von den vielfachen Versuchen, um über diese Verhältnisse einigermaassen zur Klarheit zu gelangen, sollen hier nur die schliesslichen Versuche erwähnt werden. Es wurden 4 Kupferdreiecke hergestellt und deren Oberflächen zum Theil mit Kolophonium und Wachs bezogen, um ganz bestimmte leitende Flächen als Electrodenflächen zu erhalten. Das so hergestellte Dreieck I hatte eine leitende Oberfläche von 40 qmm, das Dreieck II von 80 qmm, Dreieck III von 160 qmm, Dreieck IV von 320 qmm. Es wurden meist der Reihe nach wachsende, in einigen Fällen auch der Reihe nach abnehmende Ströme zur Herstellung der Polarisation benutzt; die angegebenen Ströme sind jene, bei welchen die Polarisationen, wenn die-

selben constant wurden, gemessen wurden. Als Stromquelle diente eine Dynamomaschine von 110 Volt Klemmspannung, die Stromstärken wurden durch Widerstände regulirt.

Dreieck I. 40 qmm.

Strom

- 0,025 Amp. Die grosse Polarisation tritt 15 Minuten nach Stromschluss mit lebhafter Gasentwicklung ein, ist kurze Zeit 50 Volt, geht dann zurück und nimmt den constanten Werth 14,16 Volt an.
- 0,037 „ Die Polarisation nimmt den constanten Werth 14,36 Volt an.
- 0,050 „ Die Polarisation nimmt den constanten Werth 14,36 Volt an.
- 0,101 „ Die Polarisation nimmt den constanten Werth 14,74 Volt an.
- 0,147 „ Die Polarisation nimmt den constanten Werth 15,91 Volt an.
- 0,210 „ Die Polarisation zeigt keinen constanten Werth an, die Electrometernadel schwankt unregelmässig zwischen einer Ablenkung von 70 Scalentheilen, einer Polarisation von 16 Volt entsprechend, und 136 Scalentheilen, ja geht zuweilen bis 160 (Polarisation 40 Volt) heraus.
- 0,147 „ Die Polarisation wird zunächst 15,9 Volt; nach einiger Zeit wird dieselbe schwankend, steigt bis 23 Volt und geht zurück auf 17,7 Volt, welchen Werth sie längere Zeit beibehält; sie scheint indess noch etwas abzunehmen.
- 0,103 „ Die Polarisation wird constant etwa 17 Volt.
- 0,055 „ Die Polarisation wird constant etwa 15,3 Volt.
- 0,035 „ Die Polarisation nimmt zunächst den Werth 14,2 an, geräth dann aber ins Schwanken, sodass die Electrometernadel unregelmässig zwischen der Nulllage und dem Theilstrich 100 hin- und hergeht, kommt kurze Zeit bei dem Theilstrich 60, entsprechend 14 Volt, zur Ruhe und beginnt neuerdings zu schwanken.

Strom

0,26 Amp. Die Polarisation nimmt kurze Zeit den Werth 18,5 Volt an, schwankt dann aber zwischen 18 Volt und einem erheblich höheren Werth, ohne dass die Electrometernadel während der zu einer Messung erforderlichen Zeit ruhig steht.

Dreieck II. 80 qmm.

- 0,025 „ Der Strom ruft während $1\frac{1}{4}$ Stunde die grosse Polarisation nicht hervor; als das Dreieck zur Spitze herausgezogen wurde, entwickelte sich dieselbe, ging bei Eintauchen des ganzen Dreiecks vollständig zurück, trat dann aber nach 5 Minuten ein und nahm für mehrere Minuten den Werth 16,3 Volt an.
- 0,013 „ Die Polarisation schwankt zwischen sehr kleinen Werthen und etwa 14 Volt, derart, dass sie kurze Zeit 14 Volt ist, dann zurückgeht auf fast Null, wieder wächst, kurze Zeit wieder 14 Volt zeigt und so fort.
- 0,021 „ Auch bei diesem Strome stellt sich die Polarisation zunächst bei 14,2 Volt ein, nach einiger Zeit geräth die Electrometernadel in Schwingungen, geht zurück auf einen kleinen Werth, zeigt dann wieder 14,2 Volt, geräth neuerdings ins Schwanken und so fort.
- 0,034 „ Die Polarisation wird constant 14,86 Volt.
- 0,050 „ „ „ „ 15,2 „
- 0,010 „ „ „ „ 16,2 „
- 0,133 „ „ „ „ 17,5 „
- 0,183 „ Die Polarisation ist erheblich schwankend, die Nadel gibt grosse Werthe an, stellt sich dann aber bei 17,5 Volt ein und nimmt noch langsam ab.
- 0,235 „ Die Polarisation schwankt, die Electrometernadel zeigt kurze Zeit 20 Volt, geht zurück auf 18,7 Volt und kommt zuletzt bei 17,1 Volt zur Ruhe.
- 0,276 „ Die Polarisation wächst auf 30 Volt, geht zurück auf 17 Volt, wächst wieder und nimmt keinen constanten Werth an.

Strom

0,29 Amp. Die Electrometernadel schwankt zwischen etwa denselben Werthen wie vorher.

Dreieck III. 160 qmm.

- 0,014 „ Nach Schluss des Stromes bleibt die Polarisation etwa 0,1 Volt und zeigt während 20 Minuten keine Zunahme. Auch als das Dreieck bis zur Spitze herausgezogen und diese eine sehr grosse Polarisation erhalten hatte, bleibt nach Eintauchen des ganzen Dreiecks die Polarisation während 10 Minuten auf dem Werthe 0,1 Volt. Erst als der Strom auf 0,1 Amp. verstärkt wurde, trat die grosse Polarisation ein. Als dann der Strom wieder auf 0,014 Amp. gebracht wurde, stellte sich kein constanter Zustand ein, die Polarisation stieg auf etwa 13 Volt, sank auf 4 Volt und ging zwischen diesen Werthen hin und her.
- 0,022 „ Die Schwankungen blieben ungefähr die gleichen.
- 0,035 „ Die Schwankungen bleiben, obere Grenze etwa 16 Volt, untere Grenze sehr kleine Werthe.
- 0,05 „ Die Polarisation nimmt nach einigem Schwanken den Werth 14,6 Volt an, geräth dann in starkes Schwanken und geht zu einem sehr kleinen Werthe zurück; sie wächst wieder, nimmt kurze Zeit den Werth 14,6 Volt an und geräth neuerdings ins Schwanken bis nahezu Null abnehmend, wächst wieder auf 15 Volt, kommt wieder ins Schwanken und so fort.
- 0,095 „ Die Polarisation wird 15 Volt und bleibt mit geringem Schwanken während 5 Minuten so stehen; dann geht die Electrometernadel langsam auf Null und wieder auf den früheren Stand. Nach 4 Minuten geräth die Nadel wieder in Schwingungen, kommt wieder zur Ruhe und geräth wieder in Schwingungen, die Schwingungen werden grösser und die Nadel geht in die Nulllage. Die Polarisation wächst wieder und das ganze Spiel wiederholt sich.

Strom

- 0,12 Amp. Die Polarisation wird 15 Volt, die Nadel geräth nach einiger Zeit in Schwingungen, beruhigt sich, fängt wieder an zu schwingen, beruhigt sich wieder und so fort.
- 0,174 „ Die Polarisation wird constant 15 Volt.
- 0,176 „ Bei Fortsetzung der Versuche am folgenden Tage trat beim Schliessen des Stromes sofort grosse Polarisation ein, sie blieb, nachdem sie zuerst auf 42 Volt gestiegen war, eine Zeit lang 17 Volt, nahm schwankend zu bis etwa 19,2, ging wieder zurück und blieb bei 18 Volt stehen.

Die schwankende Polarisation bei grösserer Stromdichte liess sich bei der zu Gebote stehenden electromotorischen Kraft an diesem Dreieck nicht mehr beobachten.

Dreieck IV. 320 qmm.

Strom

- Bei Schluss eines Stromes von 0,3 Amp. trat sehr schnell die grosse Polarisation ein, bei Schwächung des Stromes auf
- 0,0138 Amp. ging die Polarisation erst auf Null zurück, nahm aber noch 2 Minuten zu, sodass die Electrometernadel bis zu dem Theilstriche 50 der Scala ging, entsprechend der Polarisation von etwa 12 Volt. Die Polarisation wurde nicht constant, schwankte in kleineren oder grösseren Amplituden zwischen dem Theilstrich 25—50.
- 0,021 „ Die Polarisation ist anfangs etwa 14 Volt, nahm aber sehr bald ab, die Electrometernadel schwankt zwischen denselben Grenzen wie vorher.
- 0,032 „ Die Electrometernadel schwingt um den einer Polarisation von 14,5 Volt entsprechenden Stand in kleineren oder grösseren Intervallen, ohne einen festen Stand anzunehmen.
- 0,045 „ Das Electrometer zeigt zunächst eine bis 16 Volt zunehmende Polarisation, dieselbe geht schwankend auf 14 Volt zurück, die Nadel geräth neuerdings in ein zunehmendes Schwanken, bei dem sie bis zum Theilstrich 6 zurückgeht, stellt sich wieder bei 14 Volt ein, kommt ins Schwanken und so fort.

Strom

- 0,091 Amp. Die Polarisation wächst auf 16,4 Volt und geht zurück auf 14,5 Volt. Nach einiger Zeit beginnt die Electrometernadel zu schwingen, beruhigt sich, kommt wieder in immer grösser werdende Schwingungen, sodass die Nadel nahe zu Null kommt, stellt sich wieder in der Stellung 14,5 Volt ein und so fort.
- 0,127 „ Die Anodenpolarisation wird 15 Volt, die Nadel geräth aber bald in Schwingungen, beruhigt sich, schwingt wieder, beruhigt sich nochmals und schwingt dann in immer grösseren Amplituden, bei denen die Nadel bis zu Null geht, nimmt dann wieder für kurze Zeit den 14,5 Volt entsprechenden Stand ein. Nach 7 Minuten wiederholt sich das Spiel.
- 0,176 „ Die Polarisation wird 15 Volt; die Electrometernadel bleibt 14 Minuten stehen, geräth dann in Schwingungen, bei denen sie bis zum Theilstrich 16 zurückgeht, entsprechend einer Polarisation von 2 Volt, geht wieder heraus zu 15 Volt und fängt wieder an zu schwingen und so fort.
- 0,172 „ Bei den am folgenden Tage fortgesetzten Versuchen brachte dieser Strom nach 12 Minuten die grosse Polarisation, welche kurze Zeit auf 40 Volt war, dann abnahm, kurze Zeit 22 Volt wurde und dann stetig auf 15 Volt zurückging. Dieser Werth wurde während $\frac{1}{2}$ Stunde beobachtet, ohne dass ein Schwanken eintrat.
- 0,23 „ Bei Verstärkung des Stromes auf diesen Werth nahm die Polarisation langsam bis 16,1 Volt zu, blieb längere Zeit so stehen und schwankte dann, sehr langsam wachsend und abnehmend, um 16,9 Volt.
- 0,283 „ Die Anodenpolarisation wird 17,5 Volt.
- 0,32 „ Durch Vergrösserung der Klemmspannung der Maschine auf 120 Volt liess sich der Strom bis zu diesem Werthe verstärken. Die Polarisation wurde constant 17,5 Volt.

19. Bei den im letzten Paragraphen mitgetheilten Zahlen sieht man zunächst, was auch schon am Schluss von § 15

betreffs der Anodenpolarisation an Zink in Zinkvitriol hervor-
gehoben wurde, dass unter, soweit sich beurtheilen lässt, ganz
gleichen Umständen die Werthe der Anodenpolarisation nicht
unerheblich schwanken. So zeigt das kleinste Dreieck einmal
bei dem Strome 0,147 Amp. die Anodenpolarisation 15,9 Volt,
das anderemal 17,7 Volt, bei dem Strom 0,103 Amp. einmal
14,7 Volt, das anderemal 17 Volt. Zwischen den der gleichen
Stromstärke angehörigen Werthen war der Strom auf 0,21 Amp.
gebracht worden, sonst war alles bei den je zwei Messungen
ganz gleich. Beim Dreieck III ergaben die Beobachtungen
am Schluss des ersten Tages bei 0,174 Amp. die Anodenpolari-
sation 15 Volt, am folgenden Tage derselbe Strom die Polarisation
18 Volt. Einen Grund hierfür wissen wir nicht anzugeben.

Mit Beachtung dieser Unsicherheit lassen die im vorigen
Paragraphen mitgetheilten Zahlen deutlich erkennen, dass die
Polarisation innerhalb der Grenzen der Stromdichte, in welcher
dieselbe einen constanten Werth annimmt, nicht erheblich mit
der Stromdichte sich ändert. Eine Zunahme der Stromstärke
auf das vierfache lässt die Polarisation sich nur soweit
ändern, dass die Werthe zwischen Grenzen liegen, welche sich
auch bei einer und derselben Stromstärke für die Anoden-
polarisation finden. Es ist das ein erheblicher Unterschied
gegenüber dem Verhalten des Zinks in Zinkvitriol, bei welchem
die Anodenpolarisation erheblich mit der Stromdichte, und zwar
derselben nahezu proportional zunahm.

Weiter zeigt sich, dass unterhalb einer gewissen Strom-
dichte die Anodenpolarisation keinen constanten Werth an-
nimmt, vielmehr zwischen kleinen Werthen und jenem Werthe,
den dieselbe bei dem Constantwerden annimmt, hin und her
schwankt. Ebenso wird die Polarisation oberhalb einer ge-
wissen Stromdichte nicht constant, sie schwankt zwischen dem
bei geringerer Stromdichte erhaltenen constanten Werthe und
einem höheren Werthe. Es schien uns zuweilen, als wenn sich
dieselbe einem zweiten grösseren Werthe näherte, den sie bei
noch grösserer Stromdichte erreichen würde. Mit kleinen
Spitzen liess sich die Frage nicht verfolgen, da diese durch
den Strom zu rasch verzehrt und damit die Verhältnisse
schwankend werden, wir haben indess kürzere Zeit Polari-
sationen von doppelter Stärke beobachtet.

Dass es die Stromdichte ist, welche auf das Constantwerden der Polarisation den maassgebenden Einfluss hat, zeigen die Beobachtungen an den verschiedenen Dreiecken, bei Dreieck I wird die Polarisation schon bei 0,04 Amp. constant, bei Dreieck IV zeigen sich erst bei dem Strom 0,17 Amp. constante Werthe.

20. Die Polarisation an den Zink- und Kupferanoden ist hiernach eine sehr verwickelte Erscheinung, zu deren Aufklärung es noch mehrfacher Versuche bedarf; wir betrachten deshalb diese Mittheilung auch durchaus nur als eine vorläufige, welche wir im Anschluss an unsere Versuche über die Polarisation an kleinen Platinelectroden nur machen, weil durch die Uebersiedelung des einen von uns (Koch) nach Stuttgart ein gemeinsames Weiterarbeiten für uns zunächst ausgeschlossen ist. Wir begnügen uns deshalb auch hier mit einigen Andeutungen, welche Vorstellung man sich etwa über diese Vorgänge machen kann.

Was zunächst die zunehmende Polarisation an der Kathode angeht, so möchten wir diese auf die an der Kathode nach den Hittorfschen Ueberführungszahlen sowohl bei Kupfer als bei Zink eintretende Verdünnung der Lösung zurückführen, welche einmal eine electriche Differenz zwischen der Kathode und dem zum Electrometer führenden Metalle zur Folge hat; weiter aber die Kathode mit einer schlecht leitenden Schicht umhüllt. Die Verdünnung nimmt mit wachsender Stromdichte zu, es muss demnach die am Electrometer gemessene Potentialdifferenz mit wachsender Stromdichte zunehmen.

Die Erscheinungen an der Anode können wohl nur darauf zurückgeführt werden, dass das an derselben bei einer gewissen Stromdichte abgeschiedene Ion SO_4 nicht in dem Maasse das Metall der Anode zu lösen im Stande ist, als es abgeschieden wird. Es wird sich deshalb dort der Electrolyt H_2SO_4 bilden und auch von dem Strome zersetzt werden. Der zunächst aus diesem Electrolyt abgeschiedene Sauerstoff wird von dem Metall der Anode aufgenommen, bis das Metall gewissermaassen gesättigt ist; dann aber entwickelt sich der Sauerstoff an der Anode, und diese Entwicklung scheint den Anstoss zu geben, dass das occludirte Gas zum Theil aus dem Metall wieder ausgestossen wird. Wenn man dann noch die Annahme macht,

dass der an der Oberfläche der Anode entwickelte Sauerstoff durch eine oberflächliche Oxydation eine schlecht leitende Schicht hervorbrächte, so würden sich die am Zink beobachteten Erscheinungen zum grossen Theil verstehen lassen.

Die grosse Polarisation entwickelt sich hiernach, wenn die Oberfläche des Zinks mit Sauerstoff und jener schlecht leitenden Schicht bedeckt wird, deren Dicke von der Stromdichte abhängig ist. Die Polarisation besteht dann aus der durch die Sauerstoffbedeckung bedingten electromotorischen Gegenkraft und dem durch die schlecht leitende Schicht bewirkten Potentialsprung. Der Letztere muss mit der Stromstärke proportional zunehmen, wie es auch die Beobachtungen des § 15 zeigen.

Bei dem amalgamirten Zink würde anzunehmen sein, dass die durch den an der Oberfläche nach Beendigung der Occlusion entwickelten Sauerstoff hergestellte schlecht leitende Schicht bei dem Hervorbrechen des occludirten Sauerstoffs als nicht fest haftend von der Anode abgestossen würde und dass deshalb die Polarisation wieder ihren kleinen Werth annimmt, dass dann der ganze Vorgang sich wiederholt, bis das Amalgam abgestossen ist. Dann verläuft die Erscheinung wie an reinem Zink.

Dass das Rühren der Flüssigkeit, das Abwischen der Electrode, ja auch das Kratzen mit einer scharfen Glaskante nur eine Schwankung der grossen Polarisation zur Folge hat, würde einerseits zeigen, dass die Schicht sehr fest am Zink haftet, andererseits, dass die an einer einzelnen Stelle der Anode durch Kratzen fortgenommenen Schicht sich sehr rasch wieder ersetzt.

Schwer erklärlich ist in dieser Auffassung die Thatsache, dass die grosse Polarisation nicht sofort auftritt, wenn man nach kurzer Unterbrechung den Strom wieder schliesst, auch wenn der Zinkstab ruhig in der Lösung gehangen hat. Das deutet darauf hin, dass die schlecht leitende Schicht bald verschwindet, bez. dass sie wesentlich nur solange vorhanden ist, als der Strom selbst besteht.

Wie die Verbreitung des Zustandes auf eine grössere Anode, nachdem die grosse Polarisation an einem kleinen Theile der Oberfläche erzeugt war, zu Stande kommt, dafür

bietet sich in dieser Auffassung keine Erklärung, wie wir darüber eine Erklärung überhaupt nicht zu geben wissen.

Für die an den Kupferanoden beobachteten Erscheinungen genügen die vorhin gemachten Annahmen nicht; zwar würde man die erheblich höheren Werthe der Polarisation dadurch erklären können, dass man für die schlecht leitende Schicht einen erheblich grösseren Widerstand annähme als bei dem Zink, eine Annahme, welcher die geringe Zunahme der Polarisation mit der Stromstärke widerspricht. Um diese geringe Abhängigkeit der Polarisation von der Stromstärke mit der vorgeführten Auffassung in Einklang zu bringen, müsste man die Annahme hinzufügen, dass der Widerstand der angenommenen schlecht leitenden Schicht mit wachsender Stromstärke abnähme, eine Annahme, die sich durch nichts weiter begründen lässt, also nur eine Umschreibung der beobachteten Thatsache wäre.

Ebenso wenig liefert die Annahme einer schlecht leitenden Schicht eine Erklärung dafür, dass sich bei dem Kupfer nur innerhalb gewisser Grenzen der Stromdichte ein stabiler Werth der grossen Polarisation ausbildet; dass bei kleinerer Stromdichte die Werthe zwischen sehr kleinen Werthen und etwa 14 Volt unregelmässig schwanken; dass zuweilen die Polarisation während mehrerer Minuten einen festen Werth annimmt und dann plötzlich ins Schwanken kommt, und indem die Schwankungen immer grösser werden, auf sehr kleine Werthe zurückgeht, um dann sofort wieder auf den vorherigen festen Werth zu steigen; dass ferner oberhalb einer gewissen Stromdichte der vorher erreichte feste Werth die untere Grenze einer neuerdings zwischen weiten Grenzen schwankenden Polarisation wird. Man könnte ja dieser Schicht dazu bestimmte Eigenschaften beilegen, gäbe damit aber den beobachteten Thatsachen nur einen anderen Ausdruck.

Um alle diese Erscheinungen übersehen zu können wird die nächste Aufgabe sein, die vorhandenen electromotorischen Gegenkräfte und die Widerstände voneinander zu trennen.

21. Als das Resultat unserer Untersuchung erhalten wir folgendes:

1. An kurzen Drahtelectroden in verdünnter Schwefel-

säure zeigt sich eine mit wachsender Stromstärke erheblich wachsende Polarisation.

2. Die Polarisation besteht aus einer electromotorischen Gegenkraft und einem Widerstande, den wir als Uebergangswiderstand bezeichnet haben. Die electromotorische Gegenkraft ist nicht abhängig von der Länge der Spitzen und ausser bei der 1procent. Schwefelsäurelösung nicht abhängig von der Concentration der Lösung. Dieselbe hat jenen Werth, welchem sich die Polarisation von Platten bei wachsender Stromdichte annähert, 3,79 Volt.

3. Der Widerstand der sich an den Electroden bildenden schlecht leitenden Schicht, der Uebergangswiderstand ist für eine gegebene Drahtelectrode und eine gegebene Lösung constant, unabhängig von der Stromstärke. Für ein gegebenes Electrodenpaar ist er proportional dem specifischen Leitungswiderstande der Lösung; für eine gegebene Lösung nimmt er mit wachsender Länge der Drahtelectroden erheblich ab.

4. Die unter 2 und 3 angeführten Sätze gelten nur bis zu einer gewissen, von der Länge der Drahtelectroden und der Leitungsfähigkeit der Lösung abhängigen Stromstärke. Ist diese erreicht, so bewirkt eine Vergrößerung der electromotorischen Kraft den „Stromumschlag“; durch plötzliches Wachsen der Polarisation an der kleineren Electrode wird der Strom sehr schwach, es bleibt nur der „Reststrom“ übrig.

Die Stärke dieses Reststromes wird bei einer weiteren Vergrößerung der electromotorischen Kraft nicht vermehrt, die Folge dieser Vergrößerung ist nur eine dieser Zunahme gleiche Zunahme der Polarisation. Die Stärke des Reststromes ist für längere Drahtelectroden grösser als für kürzere, sie scheint ebenfalls grösser zu sein, wenn der Stromumschlag durch Wachsen der Sauerstoffpolarisation eingetreten ist, als wenn das Wachsen der Wasserstoffpolarisation ihn bewirkte.

5. Nach Auftreten des Reststromes, wenn er durch Wachsen der Polarisation der Anode bedingt ist, wird die Anode rasch verzehrt, sie geräth in lebhaftes Glühen und hat grosse innere Spannungen, welche unter Umständen eine Spaltung der Drahtelectroden herbeiführen. An der Kathode, wenn das Wachsen der Polarisation an dieser den Stromumschlag bewirkt, zeigt sich eine in bläulich weissem Lichte leuchtende Gashülle,

welch
nach
eben
zeig

Kupf
Pola
dich
einer
selbe
sich
gewi
nim
Ano
sie
grös

welche bei zunehmender electromotorischer Kraft nach und nach die ganze Electrode einhüllt; die Electrode wird dann ebenfalls glühend, ohne indess ähnliche innere Spannungen zu zeigen wie die Anode. Die Kathode bleibt unversehrt.

6. Auch Zinkelectroden in Zinksulfat, Kupferelectroden in Kupfersulfat zeigen eine mit wachsender Stromstärke wachsende Polarisation; an den Anoden tritt bei einer gewissen Stromdichte ein plötzliches Wachsen der Polarisation ein, welche an einer Zinkanode mit wachsender Stromstärke, und zwar derselben proportional, zuzunehmen scheint, an der Kupferanode sich wenig mit der Stromstärke ändert, indess nur innerhalb gewisser Grenzen der Stromdichte einen stabilen Werth annimmt. Man kann diese grosse Polarisation an grösseren Anodenflächen bei geringer Stromdichte erhalten, wenn man sie vorher an einem kleinen Theile der Oberfläche durch grössere Stromdichte hervorgerufen hat.

Aachen und Stuttgart, im November 1891.

VII. *Magnetische Experimentaluntersuchungen;* *von Carl Fromme.*

(Hierzu Taf. VIII Fig. 9.)

Siebente Abhandlung.

Ueber verschiedene Zustände des permanenten Magnetismus.

§ 1. Es ist bekannt, dass die Wirkung, welche eine magnetisirende Kraft auf das permanente Moment eines Eisenkörpers ausübt, sowohl durch die *Grösse* des Moments bestimmt wird, als auch durch die *Art seiner Entstehung*. Wenn z. B. das permanente Moment durch eine Kraft P erzeugt war, so bringt eine in der gleichen Richtung wie P wirkende Kraft $p < P$ eine kleine Aenderung hervor, welche je nachdem (vgl. die 5. Abh.) in einer Zunahme oder in einer Abnahme bestehen kann. War dagegen eine permanente Magnetisirung durch Wirkung einer Kraft $P > P$ entstanden, aber dann durch eine in entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft π auf denselben Werth, den P im ersten Fall erzeugte, reducirt worden, so bringt nun Kraft p eine viel grössere Zunahme des permanenten Moments hervor.

Die Versuche, welche ich in der 5. Abhandlung beschrieben habe, zeigten, dass der Unterschied in der Wirkung der Kraft p auch dann noch bestehen bleibt, wenn Kraft π der Kraft P gleichgerichtet und von solcher Grösse war, dass sie das von P' ($P' = P$ angenommen) erzeugte permanente Moment gar nicht änderte.

Ich habe aus diesen Versuchen geschlossen, dass ein permanentes Moment bei gleicher Grösse noch in verschiedenen Zuständen bestehen, d. h. dass die Anordnung der Molecularmagnete mannigfaltig variiren kann, und dass jeder dieser Zustände ein ihm eigenthümliches Widerstandsvermögen gegen störende Kräfte besitzt, indem sich benachbarte Molecularmagnete im einen Fall zu mehr, im anderen zu weniger stabilen Gruppen zusammenschliessen.

Nachdem ich nun in der 6. Abhandlung bewiesen habe, dass die Geschwindigkeit, mit welcher die magnetisirende Kraft abfällt, einen durch secundäre Ursachen nicht zu erklärenden Einfluss auf die Grösse des permanenten Moments besitzt, will ich jetzt den Zustand, in welchem sich ein solches, bei rascher Kraftabnahme erzeugtes PM befindet, genauer untersuchen und mit anderen Zuständen des permanenten Moments in Vergleich stellen.

§ 2. Wenn man die magnetisirende Kraft rasch auf Null absinken lässt, so ist, wie a. a. O. gezeigt, das resultirende permanente Moment PM kleiner als nach langsamer Reduction der Kraft auf Null.

Das letztere Verfahren liefert das maximale PM . Einen ebenso grossen Verlust, wie durch rasche Kraftabnahme (Stromunterbrechung), kann man dem PM Max. auch durch eine in conträrer Richtung wirkende Kraft von passender Grösse oder durch Erschütterungen von geeigneter Stärke zufügen. Eine mögliche Verschiedenheit des Zustands der drei so erhaltenen gleich grossen permanenten Momente wurde dadurch festgestellt, dass man in der einen oder anderen Richtung auf das reducirte PM eine Kraft wirken liess und den von ihr inducirten temporären Magnetismus, sowie die Zu- oder Abnahme bestimmte, welche PM durch sie erfuhr.¹⁾ Die Versuche wurden mit Bündeln dünner Eisendrähte, mit Eisen- und Stahlstäben ausgeführt. Für rasche Kraftabnahme wurde der Strom gewöhnlich zwischen Platinflächen unterbrochen, langsame Kraftabnahme (zur Erzielung des PM Max., von welchem immer ausgegangen wurde), erreichte man durch allmähliche Einschaltung von Flüssigkeitswiderstand. Für die Erschütterungen diente ein hölzerner Hammer.

§ 3. Ich beschreibe zuerst die Versuche, bei welchen die prüfende Kraft in der nämlichen Richtung wirkte, wie diejenige, welche das PM Max. erzeugt hatte. Das durch Stromunterbrechung, conträren Strom oder Erschütterung reducirte PM nahm in diesem Fall wieder zu²⁾ und näherte sich dem PM Max.

1) Einige wenige derartige Versuche sind schon in der 3. Abhandlung mitgetheilt worden.

2) Ueber Ausnahmen vgl. Tabelle 8.

Die Tabellen 1—5 beziehen sich auf das in der 5. und 6. Abhandlung schon mehrfach erwähnte Drahtbündel in Paraffin.

Die electromotorische Kraft lieferten stets 5 Bunsen'sche Elemente. Die Stromstärke bezeichne ich durch Angabe des im Siemens'schen Rheostaten liegenden Widerstands. Bei allen im Folgenden angeführten Versuchen wurde PM Max. bei $W = 0$ im Rheostaten erzeugt.

Tabelle 1.

Dem PM Max. = 815 sc. wurde ein Verlust zugefügt entweder durch Unterbrechung des Stromes bei $W = 0$ oder bei $W = 20$ oder durch Vornahme passender Erschütterungen. Sollten letztere einen ebenso grossen Verlust verursachen, wie die Stromunterbrechung bei $W = 20$, so liess man ebenfalls zuerst den Strom mit $W = 20$ auf das PM Max. wirken, — liess ihn aber selbstverständlich langsam auf Null absinken — und nahm dann erst die Erschütterungen vor. Die prüfende Kraft lag zwischen $W = 100$ und $W = 20$. Der Verlust betrug im Mittel

durch Stromunterbrechung	durch Erschütterung
bei $W = 0$: 117,0 sc.	116,5 sc.
bei $W = 20$: 91,0 sc.	und 91,6 sc.

Von diesen Mitteln wichen die Einzelwerthe immer nur sehr wenig ab.

a) Das durch Stromunterbrechung bei $W = 20$ resp. durch Erschütterung reducirte PM nahm durch $W = 100$ bis $W = 20$ um folgende Beträge zu:

W	1 malige Wirkung der Kraft		3 malige Wirkung der Kraft		5 malige Wirkung der Kraft	
	nach Unterbr.	nach Erschütt.	nach Unterbr.	nach Erschütt.	nach Unterbr.	nach Erschütt.
100	14,8	21,0	—	—	—	—
50	35,1	48,5	—	—	—	—
35	51,4	65,8	57,3	70,3	—	—
27	62,2	86,0	69,5	92,0	71,2	93,0
20	77,1	91,2	84,9	97,2	86,9	97,7

b) Zunahme des durch Stromunterbrechung bei $W = 0$ resp. durch Erschütterung reducirten PM .

W	1 malige Wirkung der Kraft		3 malige Wirkung der Kraft		5 malige Wirkung der Kraft	
	nach Unterbr.	nach Erschütt.	nach Unterbr.	nach Erschütt.	nach Unterbr.	nach Erschütt.
100	14,0	25,6	13,5	26,7	—	—
70	20,9	40,9	21,3	43,0	—	—
50	29,7	60,9	34,5	64,0	—	—
40	39,4	78,2	47,7	83,1	—	—
30	50,4	97,7	61,4	104,0	63,4	105,0
20	70,7	116,0	83,4	122,5	86,1	123,5

Das durch Stromunterbrechung reducirte PM wächst also in jedem Falle weniger als das durch Erschütterung um gleichviel geschwächte, der Unterschied erreicht 100 Proc. In beiden Fällen wächst die Zunahme mit der Zahl der Kraftwirkungen, aber stärker nach Stromunterbrechung als nach Erschütterung, sodass der Unterschied etwas kleiner wird, je öfter man die Kraft anwendet. Mit wachsender Kraft nimmt der relative Unterschied ebenfalls ab. Durch Stromunterbrechung bei $W = 0$ wurde PM stärker geschwächt, als bei $W = 20$. Trotzdem sind in Reihe b) die Zunahmen sämtlich kleiner als in Reihe a), während dagegen dem grösseren Verlust durch Erschütterung stets auch die grössere Zunahme folgt. In Reihe b) wird durch einmalige Wirkung von $W = 20$ der durch die Erschütterungen hervorgerufene Verlust gerade ausgeglichen, während mehrmalige Wirkung PM über den Ausgangswerth 815 steigert. Hierin spricht sich die spezifische Wirkung der kleineren Kraft ($W = 20$) aus, wenn sie nach einer grösseren ($W = 0$) wirkt. (5. Abh.)

Tabelle 2.

Das PM Max. = 820 wurde durch eine der conträren Kräfte $W = 300, 400, 500, 700, 1000$ geschwächt. Einen ebenso grossen Verlust ertheilte man dem PM durch Erschütterungen. Vergrössernd wirkte darauf eine der Kräfte $W = 50, 40, 30, 20$. Der Erschütterungsverlust war selbstverständlich dem durch die conträre Kraft niemals genau gleich zu erhalten.

Es wurden deshalb die Erschütterungsverluste als Abscissen, die Zunahmen durch eine der vergrößernden Kräfte als Ordinaten aufgetragen. Man erhielt so Curven, welche gegen die Abscissenaxe concav waren. Aus ihnen wurde diejenige Zunahme entnommen, welche eingetreten sein würde, wenn der Verlust durch Erschütterung genau ebenso gross wie der durch conträren Strom gewesen wäre.

Contr. Kraft $W =$	Gleichgerichtete Kraft											
	$W = 50$			$W = 40$			$W = 30$			$W = 20$		
	Ver- lust	Zunahme		Ver- lust	Zunahme		Ver- lust	Zunahme		Ver- lust	Zunahme	
		nach c. K.	nach Ersch.		nach c. K.	nach Ersch.		nach c. K.	nach Ersch.		nach c. K.	nach Ersch.
300	183,6	85,6	83,5	179,0	110,2	110,5	186,3	148,6	144,5	183,1	168,9	168,6
400	139,2	68,5	69,0	139,8	91,9	90,0	141,5	118,5	117,5	—	—	—
500	115,8	60,9	60,0	114,0	78,0	78,5	117,3	101,5	100,5	114,8	113,0	112,5
700	80,7	45,1	45,0	81,0	59,7	59,8	81,0	75,5	75,5	—	—	—
1000	57,0	34,6	35,0	57,5	46,4	47,5	57,7	58,7	58,0	—	—	—

Die Zunahme des PM nach einem Verlust durch conträren Strom ist also derjenigen nach einem Erschütterungsverlust immer nahe gleich, die kleinen Unterschiede sind fast zu gleichen Theilen positiv und negativ. Wir können also den Satz aussprechen:

„Bei Bündeln dünner Eisendrähte wird das permanente Moment durch Erschütterungen in den gleichen Zustand versetzt, wie durch einen conträren Strom. Von beiden verschieden ist aber der Zustand, in welchen PM durch eine Stromunterbrechung gelangt.“

Ich habe mir nun die Frage vorgelegt, ob es nicht möglich sei, den letzteren Zustand dadurch vollkommen in den ersteren überzuführen, dass man dem durch Stromunterbrechung geschwächten PM noch einen weiteren Verlust durch Erschütterungen oder durch einen conträren Strom zufügt.

Tabelle 3.

Durch Stromunterbrechung bei $W = 0$ erfuhr PM Max. = 820 sc. im Mittel einen Verlust von 119 sc. Durch einmalige Wirkung der Kraft $W = 40$ erfolgte wieder eine Zunahme von

40,0 sc. Schwächte man aber das reducirte $PM = 701$ durch Erschütterungen bei 5 Versuchen noch weiter um

6,8 36,2 46,5 68,9 93,8,

sodass der Gesamtverlust resp. war:

129,3 153,7 165,9 187,3 212,8

so nahm PM durch $W = 40$ zu um

46,2 79,5 88,0 101,8 122,8.

Brachte man dagegen die obigen Gesamtverluste ausschliesslich durch Erschütterungen hervor, so ergaben sich durch $W = 40$ die Zunahmen:

84,5 97,5 104,0 114,5 128,0,

welche um

38,3 18,0 16,0 12,7 5,2

grösser sind.

Demnach unterscheidet sich der Zustand, in den man PM durch Stromunterbrechung und nachfolgende Erschütterungen versetzt, zwar immer von dem durch Erschütterungen allein resultirenden, aber er nähert sich doch dem letzteren um so mehr an, ein je grösserer Theil des ganzen Verlustes durch die Erschütterung verursacht ist. Bei der letzten Beobachtung ging die Annäherung schon bis auf 4 Proc., obwohl der Erschütterungsverlust noch erheblich kleiner als der aus Stromunterbrechung war.

Da sich nach Tab. 2 Erschütterung und conträrer Strom in ihrer Wirkung auf PM als gleich erwiesen hatten, so stellte ich weitere Versuche auch in der Weise an, dass ich dem PM Max. zuerst einen Verlust mittelst Stromunterbrechung, sodann einen weiteren durch einen conträren Strom zufügte. Als prüfende Kraft diente wieder $W = 40$.

Tabelle 4a.

Abnahme durch Stromunterbrechung	Abnahme durch den contr. Strom $W =$	Gesamt-abnahme	Zunahme durch $W = 40$	Zunahme durch $W = 40$ vermindert um 38,7
119,1	∞	0	119,1	0
116,9	3000	10,9	127,8	11,1
117,8	2000	18,6	136,4	19,1
119,5	1500	25,8	145,3	26,6

Abnahme durch Stromunterbrechung	Abnahme durch den contr. Strom $W =$		Gesamt-abnahme	Zunahme durch $W = 40$	Zunahme durch $W = 40$ vermindert um 38,7
119,4	1200	33,2	152,6	73,1	34,4
118,1	1000	41,5	159,6	81,3	42,6
119,8	800	53,7	173,5	91,6	52,9
119,5	600	73,7	193,2	107,7	69,0
120,4	500	90,0	210,4	120,7	82,0
122,3	450	101,0	223,3	128,0	89,3
120,7	400	115,1	235,8	133,9	95,2
120,6	350	131,9	252,5	143,8	105,1
120,5	300	154,5	275,0	157,4	118,7
120,7	270	172,3	293,0	167,5	128,8
121,3	240	193,8	315,1	179,6	140,9
120,8	220	210,8	331,6	189,0	150,3

Ausserdem reducirte ich das PM Max. auch allein durch einen conträren Strom und bestimmte die Zunahme durch $W = 40$.

Tabelle 4b.

Conträrer Strom $W =$	2000	1500	1200	1000	800	600	500	450	400
Abnahme des PM Max.	28,7	37,0	46,7	56,3	70,8	95,3	112,3	123,8	139,7
Zunahme durch $W = 40$	27,0	32,7	38,3	44,9	52,6	67,1	75,5	81,8	90,3
Conträrer Strom $W =$	350	300	270	240	220	200	180	165	160
Abnahme des PM Max.	157,6	183,3	202,3	226,8	246,0	268,5	294,0	319,2	329,3
Zunahme durch $W = 40$	99,6	113,0	120,3	135,2	144,3	154,3	169,0	181,5	190,4

Die graphische Darstellung der Versuche Tabelle 4b) in Fig. 9 — Abscisse = Verlust, Ordinate = Zunahme — ergibt eine gegen die Abscissenaxe zuerst schwach concave, später geradlinig verlaufende Curve. Die entsprechende, die Versuche in Tabelle 4a) darstellende Curve beginnt bei der Abscisse 119,1, ist anfangs ebenfalls concav gegen die Abscissenaxe und verläuft nachher geradlinig. Der ersteren Curve nähert sie sich zunächst rasch, später langsam und scheint sie bei einem 300 übersteigenden Gesamtverlust vollkommen zu erreichen. Somit verschwindet die spezifische Wirkung der Stromunterbrechung auf PM um so mehr, einen je grösseren Verlust

durch conträren Strom man dem PM noch zufügt; bei einem Gesamtverluste von mehr als 300 ist sie ganz verschwunden. In der letzten Reihe der Tabelle 4a) findet sich die Zunahme durch $W = 40$ vermindert um diejenige Zunahme, welche das nur durch Stromunterbrechung reducirte PM erfährt. Diese Zahlen übersteigen bei schwachen conträren Strömen den durch diese allein hervorgerufenen Verlust, bei den stärkeren bleiben sie hinter demselben zurück, stets sind sie aber grösser als diejenige Zunahme, welche PM erfährt, wenn es nur durch conträren Strom reducirt war — wie der Vergleich mit Tabelle 4a) lehrt.

„Erschütterung sowohl als ein conträrer Strom modificirt also den Zustand des durch Stromunterbrechung reducirten PM derart, dass eine der magnetisirenden gleichgerichtete Kraft eine grössere Zunahme hervorbringt, welche sogar, wenn die Erschütterung oder der conträre Strom hinreichend stark war, diejenige erreichen kann, die nach alleiniger Wirkung einer Erschütterung oder eines conträren Stroms beobachtet wird.“

Während bei den bisherigen Versuchen nur die Zunahme des PM beobachtet wurde, gebe ich in Tabelle 5) eine Reihe, in welcher auch die ganzen inducirten Momente gemessen sind. Ich bezeichne dieselben durch GM , die Zunahme des PM durch $\delta.PM$, die Differenz $GM - \delta.PM$, d. h. das verschwindende Moment durch TM .

Tabelle 5.

Die Entfernung der Magnetisirungsspirale vom Magnetometer war in den folgenden fünf Beobachtungsreihen nicht die gleiche. PM Max. ist daher durch verschiedene Zahlen ausgedrückt. Die GM sind stets (auch bei der zweiten und folgenden Wirkungen der Kraft) von dem reducirten PM an gezählt.

PM Max.	Reduction des PM durch	Grösse des Verlustes	Vergröss. wirkt $W =$	Zahl der Einwirk.	GM	$\delta.PM$	TM
900	Stromunt.	96,6	200	1	73,4	6,9	66,5
	Erschütt.	{ 113,9	200	1	70,1	11,6	58,5
		{ 90,0	200	1	69,0	10,2	58,8
900	Stromunt.	{ 103,4	100	1	165,5	15,0	150,5
		{ 102,6	100	1	166,3	15,2	151,1

<i>P M</i> Max.	Reduction des <i>P M</i> durch	Grösse des Verlustes	Vergröss. wirkt <i>W</i> =	Zahl der Einwirk.	<i>G M</i>	$\delta . P M$	<i>T M</i>
740	Erschütt.	{ 107,0 102,9	100	1	156,8	24,8	132,0
	Stromunt.	102,7	70	1	213,9	18,9	195,0
	Erschütt.	99,2	70	1	201,2	34,2	167,0
	Stromunt.	113,4	55	1	285,9	24,6	261,3
752	Stromunt.	113,4	55	2	258,4	27,1	231,3
			55	6	245,9	26,9	219,0
			55	1	280,5	51,2	229,3
	Erschütt.	114,3	55	2	272,0	53,2	218,8
740	Contr. Str.	112,6	55	6	268,5	53,5	215,0
			55	1	281,5	51,0	230,5
			55	2	274,5	53,0	221,5
	Stromunt.	104,2	55	6	268,7	54,0	214,7
			50	1	330,0	28,0	302,0
			50	2	298,3	31,7	266,6
	Erschütt.	102,7	50	8	276,5	30,8	245,7
			50	1	317,5	53,1	264,4
			50	2	309,0	55,3	253,7
	Stromunt.	104,2	50	8	299,8	55,8	244,0
			50	1	330,0	28,0	302,0
			50	2	298,3	31,7	266,6

Die Verschiedenheit des Zustandes von *P M*, welche nach Stromunterbrechung einerseits, nach einem conträren Strom oder Erschütterung andererseits bis dahin in der Verschiedenheit der $\delta . P M$ hervortrat, macht sich also auch bei dem ganzen inducirten Moment *G M* bemerkbar: Dasselbe ist am grössten nach Stromunterbrechung, aber nur bei der ersten Wirkung der Kraft, bis zur zweiten Wirkung fällt es schon so stark ab, dass es von da an die letzte Stelle einnimmt. Nach einem conträren Strom und nach Erschütterung sind auch die *G M* einander gleich, sowie die $\delta . P M$ die gleichen waren. „Man wird also die durch conträren Strom und Erschütterung hervorgerufenen beiden Zustände des *P M* als vollkommen identisch — bei Drahtbündeln — betrachten dürfen.“ Der nach Stromunterbrechung bei der ersten Wirkung der Kraft grosse Werth von *G M* und der kleine Werth von $\delta . P M$ bringen zusammen das abnorm grosse *T M* hervor. Dasselbe nimmt aber mit Wiederholung der Einwirkung stark ab und unterscheidet sich schliesslich kaum noch von den nach conträrem Strom oder Erschütterung beobachteten Werthen.

Da ich aus vielfacher Erfahrung wusste, dass bei magnetischen Erscheinungen nicht nur das Material der Eisenkörper,

sondern auch ihre Form von entscheidendem Einfluss ist, dass also, um zu allgemeinen Gesetzen zu gelangen, die Messungen sich auf Körper der verschiedensten Dimensionen erstrecken müssen, so untersuchte ich ausser Drahtbündeln auch Eisen- und Stahlstäbe. In der That verhielten sich dieselben nicht durchaus den Drahtbündeln gleich.

Tabelle 6.

Eisenstab, Länge = 17 cm, Dicke = 0,6 cm, $PM_{\text{Max.}} = 534$.

Reduction des $PM_{\text{Max.}}$ durch	Grösse des Verlustes	Vergröss. wirkt $W =$	Zahl der Einwirk.	GM	$\delta. PM$	TM
Stromunt.	243,4	150	1	486,2	37,8	448,4
			2	429,7	48,2	381,5
			3	407,3	52,2	355,1
			6	386,2	56,7	329,5
Contr. Strom	237,0	150	1	499,4	142,0	357,4
			2	490,0	146,0	344,0
			3	489,0	147,5	341,5
			6	482,0	150,0	332,0
Stromunt.	246,9	250	1	284,9	26,4	258,5
			2	240,2	33,2	207,0
			3	223,8	36,4	187,4
			6	208,9	35,7	173,2
Contr. Strom	244,0	250	1	294,5	106,5	188,0
			2	290,2	109,5	180,7
			3	290,2	110,5	179,7
			6	287,8	111,8	176,0
Erschütt.	255,2	250	1	274,3	88,5	185,8
			6	268,7	93,5	175,2
Stromunt.	249,4	400	1	175,1	19,4	155,7
			6	123,4	25,4	98,0
Contr. Strom	248,0	400	1	179,0	77,0	102,0
			6	179,0	79,0	100,0
Erschütt.	248,2	400	1	161,6	57,5	104,1
			6	159,7	59,7	100,0
Stromunt.	245,1	600	1	106,4	11,8	94,6
			2	85,4	14,8	70,6
			6	75,2	14,6	60,6
Contr. Strom	243,2	600	1	119,3	53,8	65,5
			2	119,1	55,1	64,0
			6	119,3	55,5	63,8
Erschütt.	243,5	600	1	104,0	38,8	65,2
			2	104,0	40,0	64,0
			6	103,8	40,2	63,6
Stromunt.	249,2	1000	1	67,7	9,2	58,5
			2	53,4	10,7	42,7
			6	46,7	10,9	35,8

Reduction des <i>PM</i> Max. durch	Grösse des Verlustes	Vergröss. wirkt <i>W</i> =	Zahl der Einwirk.	<i>GM</i>	δ . <i>PM</i>	<i>TM</i>
Contr. Strom	250,8	1000	1	72,3	35,3	37,0
			2	72,5	36,2	36,3
			6	72,5	36,3	36,2
Erschütt.	247,6	1000	1	55,3	19,3	36,5
			2	56,0	20,0	36,0
			6	56,2	20,3	35,9

Auch bei dem Eisenstabe nimmt also *PM* am wenigsten zu, wenn es durch Stromunterbrechung reducirt worden war, aber es tritt jetzt auch noch ein Unterschied zwischen den δ . *PM* nach conträrem Strom und nach Erschütterung auf: es nimmt *PM* stärker zu, wenn der Verlust durch einen conträren Strom, als wenn er durch Erschütterung herbeigeführt war. Ebenso verhält sich *GM*: Es ist grösser nach conträrem Strom als nach Erschütterung und übertrifft dann auch das nach Stromunterbrechung inducirte *GM*. Dagegen sind die *TM* nach conträrem Strom und nach Erschütterung immer nahe einander gleich; bei den ersten Impulsen der Kraft sind sie viel kleiner, als nach Stromunterbrechung, schliesslich aber etwas grösser. Die Zunahme des *PM* durch wiederholte Wirkung der Kraft ist, wie bei den Drahtbündeln, relativ am bedeutendsten nach Stromunterbrechung.

Das hervorstechende Merkmal des durch Stromunterbrechung geschaffenen Zustandes ist also einmal die geringe Zunahmefähigkeit des reducirten *PM*, welche in Tabelle 6 nur den dritten bis vierten Theil derjenigen nach Wirkung eines conträren Stromes beträgt, und zweitens bei wiederholter Einwirkung der Kraft, die starke Abnahme von *TM*, welche durchschnittlich um 50 Proc. grösser ist, als wenn *PM* durch conträren Strom oder Erschütterung reducirt war.

Wir gelangen also zu dem Resultat, dass „bei Eisenstäben jeder der drei Zustände des permanenten Moments, die durch Stromunterbrechung, conträren Strom und Erschütterung geschaffen werden, von den anderen verschieden ist.“

Nun habe ich in der vorigen Abhandlung gezeigt, dass das *PM* Max. eines Eisenstabes nicht nur durch Stromunterbrechung, sondern auch schon durch *rasche* Vergrösserung eines eingeschalteten Flüssigkeitswiderstandes eine Abnahme

[illegible]

Aus diesen Beobachtungen folgt, dass ebenso wie bei dem Eisenstab, so auch bei dem Stahlstab, die grösste Zunahme des PM dann eintritt, wenn es durch einen conträren Strom, eine kleinere, wenn es durch Erschütterung, und die geringste, wenn es durch Stromunterbrechung reducirt war.

Die starke Abnahme, welche GM und TM mit Wiederholung der Kraftwirkung bei dem Eisenstab und dem Drahtbündel erfuhren, wenn PM durch Stromunterbrechung geschwächt worden war, zeigen die Beobachtungen mit dem Stahlstab ebenfalls. Ferner ist auch, wie bei dem Eisenstab, das TM des ersten Impulses grösser, das des sechsten aber kleiner, wenn PM durch Stromunterbrechung, als wenn es durch Erschütterung reducirt war.

Folgendes aber ist allein bei Stahlstäben beobachtet worden: Während ein durch Erschütterung oder conträren Strom reducirtes PM mit Wiederholung der Impulse fortwährend zunahm, zeigte das durch Stromunterbrechung reducirte PM meist schon vom zweiten Impulse der vergrössernden Kraft an wieder eine Abnahme. Die Erklärung dafür liegt (nach der 5. Abh.) darin, dass diese Kraft schon zu dem Gebiet derjenigen Kräfte gehörte, welche nach einer grösseren und in der gleichen Richtung wie diese wirkend, das von derselben erzeugte PM verringern. Diese verkleinernde Wirkung der Kraft überwiegt also dann über die Tendenz zur Zunahme.¹⁾

Bei den bisherigen Versuchen war die Schwächung des PM Max. durch nur eine conträre Kraft bewirkt worden. In Tabelle 9 wird PM entweder durch 7 aufeinander folgende conträre Kräfte oder durch eine einzige reducirt, und der resultierende Zustand geprüft durch Anwendung der PM wieder vergrössernden Kraft $W = 250$.

1) Bei einem Drahtbündel beobachtete ich, dass nach einem Verlust durch Stromunterbrechung sowohl als nach einem solchen durch conträren Strom eine folgende kleine Kraft überhaupt keine Zunahme, sondern vom ersten Impuls an eine beträchtliche Abnahme des PM hervorbrachte.

Tabelle 9.

Eisenstab. PM Max. = 530.

Reduction des PM Max. durch	Grösse des Verlustes	Zahl der Wirk. der PM vergröss. Kraft	GM	$\delta . PM$	TM
7 contr. Kräfte	250,5	1	295,3	107,3	188,0
		2	292,1	109,7	182,4
		6	288,9	112,1	176,8
1 contr. Kraft	245,0	1	295,5	107,5	188,0
		2	292,1	110,5	181,6
		6	290,3	112,7	177,6

Es ist also gleichgültig, ob man die Reduction in 7 Stufen oder auf einmal ausführt, der resultirende Zustand des PM ist in beiden Fällen derselbe.

Weitere Versuche stellte ich in der Weise an, dass ich eine Schwächung des PM Max. von etwa der Grösse wie in Tabelle 9 durch eine Reihe von abwechselnd entgegen- und gleichgerichteten Kräften ausführte, und zwar wählte ich die Kräfte entweder a) so, dass die schliesslich zu erreichende untere Grenze von PM niemals oder b) so, dass dieselbe zeitweise unterschritten wurde. In beiden Fällen aber schwächte die letzte der angewendeten Kräfte die Magnetisirung. Es folgte darauf die prüfende Kraft $W = 250$, welche die permanente Magnetisirung wieder vergrösserte.

Tabelle 10.

Eisenstab. PM Max. = 530.

Reduction des PM durch gleich- u. ent- gegenger. Kr.	Grösse des Verlustes	Zahl der Wirk. der PM vergröss. Kraft	GM	$\delta . PM$	TM
a	241,3	1	290,6	104,0	186,6
		2	288,0	106,9	181,1
		6	286,0	109,0	177,0
b	250,2	1	244,6	59,3	185,3
		2	243,6	61,2	182,4
		6	241,2	62,5	178,7

Während also die GW und $\delta.PM$ der Reihe a) nur wenig kleiner als die entsprechenden Werthe der Tabelle 9 sind, bleiben die der Reihe b) sehr beträchtlich hinter ihnen zurück. Nur die TM sind in allen vier Reihen der Tabellen 9 und 10 einander gleich.

„Der Zustand des permanenten Moments also, welcher durch eine Reihe von abwechselnd gerichteten Kräften erzeugt wird, unterscheidet sich nur dann von demjenigen, welchen eine einzige conträre Kraft C hervorbringt, wenn PM bei einer oder mehreren derselben unter denjenigen Werth herabsank, auf welchen es durch Kraft C gelangt.“

In Reihe b) wird also ein Zustand von PM erreicht, der bezüglich der kleinen Werthe von $\delta.PM$ Aehnlichkeit mit demjenigen hat, welcher durch eine Stromunterbrechung erzeugt wird. Dagegen unterscheidet er sich von dem letzteren ganz wesentlich in Bezug auf die GM und TM . Diese sind hier mit Wiederholung der Kraftwirkung nur wenig veränderlich, während sie nach Stromunterbrechung so sehr stark abnahmen.

§ 4. Ich theile nun einige von den Versuchen mit, welche ich mit entgegengerichteten Kräften ausführte. Es wurde also auch jetzt dem PM Max. ein Verlust entweder durch Stromunterbrechung oder durch einen conträren Strom oder durch Erschütterung zugefügt. Darauf liess man einen conträren Strom auf das reducirte PM wirken und bestimmte den in Folge desselben weiter eintretenden Verlust $\delta.PM$, sowie das ganze inducirte Moment GM .

Tabelle 11.

Drahtbündel in Paraffin. PM Max. = 900 bei den sechs ersten, dagegen PM Max. = 752, bei der letzten Beobachtungsreihe ($W = 300$). Auch geschah die Stromunterbrechung zuerst ausnahmsweise an Quecksilber, und nur bei der letzten Reihe an Platin.

Reduction
des PM
durchStromunt.
Erschütt.
Contr. Str.Stromunt.
Erschütt.Stromunt.
Erschütt.Stromunt.
Erschütt.Stromunt.
Erschütt.Stromunt.
Erschütt.

Contr. Str.

R
des

S

Co

S

I

Co

Reduction des <i>PM</i> durch	Gr. der Red.	Dar. wirkt ebenf. schw. <i>W</i> =	<i>GM</i>	δ . <i>PM</i>	<i>TM</i>	Reduction des <i>PM</i> durch	Gr. der Red.	Dar. wirkt ebenf. schw. <i>W</i> =	Zahl der Wirk.	<i>GM</i>	δ . <i>PM</i>	<i>TM</i>
Stromunt.	105,7	2000	25,6	19,8	5,8	Stromunt.	105,8	300	1	178,9	142,2	36,7
Erschütt.	99,2	2000	5,3	0,0	5,3				2	177,2	145,8	31,4
Contr. Str.	106,3	2000	5,2	0,0	5,2				4	179,0	147,8	31,2
Stromunt.	99,8	1200	45,0	35,0	10,0	Erschütt.	112,0	300	1	95,4	62,7	32,7
Erschütt.	101,1	1200	9,0	0,2	8,8				2	97,7	66,5	31,2
Stromunt.	102,0	800	74,5	59,2	15,3				4	100,0	69,0	31,0
Erschütt.	98,0	800	15,0	1,3	13,7	Contr. Str.	108,5	300	1	93,9	61,4	32,5
Stromunt.	104,5	500	123,0	97,5	25,5				2	96,8	65,7	31,1
Erschütt.	108,1	500	46,9	24,6	22,3				4	98,9	68,2	30,7
Stromunt.	94,3	400	155,7	123,7	32,0							
Erschütt.	103,8	400	85,2	56,7	28,5							
Stromunt.	98,7	300	210,3	167,0	43,3							
Erschütt.	110,7	300	139,3	99,8	39,5							
	97,0	300	150,0	111,0	39,0							
Contr. Str.	106,5	300	138,8	100,0	38,8							

Tabelle 12.

Eisenstab der Tabelle 6. *PM* Max. = 535.

Reduction des <i>PM</i> durch	Grösse der Reduction	Darauf wirkt ebenf. schw. <i>W</i> =	Zahl der Wirk.	<i>GM</i>	δ . <i>PM</i>	<i>TM</i>
Stromunt.	250,5	500	1	207,8	77,5	130,3
			2	199,3	100,3	99,0
			6	195,0	114,5	80,5
Erschütt.	257,2	500	1	86,0	3,7	82,3
			2	85,9	4,0	81,9
			6	85,2	4,3	80,9
Contr. Strom	252,4	500	1	83,5	0,0	83,5
			2	82,0	0,2	81,8
			6	80,6	0,4	80,2
Stromunt.	253,8	350	1	303,2	108,7	194,5
			2	293,1	140,7	152,4
			6	287,7	162,2	125,5
Erschütt.	260,5	350	1	132,9	9,5	123,4
			2	134,3	10,5	123,8
			6	133,1	11,8	121,3
Contr. Strom	252,0	350	1	129,0	1,2	127,8
			2	128,0	1,3	126,7
			6	126,0	2,0	124,0

Tabelle 13.
Stahlstab der Tabelle 8. $PM \text{ Max.} = 752.$

Reduction des PM durch	Grösse der Reduction	Darauf wirkt ebenf. schw. $W =$	Zahl der Wirk.	GM	$\delta . PM$	TM
Stromunt.	129,2	50	1	379,0	193,6	185,4
			2	376,2	199,8	176,4
			6	377,5	202,5	175,0
Erschütt.	131,0	50	1	342,3	158,6	183,7
			2	342,0	164,5	177,5
			6	—	166,5	—
Contr. Strom	128,0	50	1	334,0	151,5	182,5
			2	337,0	159,8	177,2
			6	—	163,8	—

Die Versuche beweisen, dass man auch mittelst eines das permanente Moment noch mehr schwächenden Stromes erkennen kann, ob eine Stromunterbrechung, eine Erschütterung oder ein conträrer Strom vorausgegangen war. Im letzten Falle ist die Wirkung des prüfenden conträren Stromes am kleinsten — wie bei der Gleichartigkeit der beiden aufeinander folgenden Prozesse nicht anders zu erwarten, — etwas grösser sind $\delta . PM$ und GM nach einer Erschütterung, aber nur bei Stahl- und namentlich bei Eisenstäben, während bei Drahtbündeln conträrer Strom und Erschütterung sich wieder gleich verhalten, und weitaus am grössten fällt die neue Schwächung $\delta . PM$ der permanenten Moments nach einer Stromunterbrechung aus. Dann ist auch GM am grössten und nimmt bei wiederholter Wirkung der Kraft vorwiegend ab. Die Grösse des verschwindenden Moments TM erfährt in jedem Falle bei folgenden Einwirkungen der Kraft eine Abnahme, die wieder besonders gross nach Stromunterbrechung und bei Eisenstäben ist.

Diese Beobachtungen mit einer Kraft, welche den Verlust an permanentem Moment noch vergrössert, führen also in der Hauptsache zu demselben Resultat, wie die in § 3 beschriebenen, bei welchen die prüfende Kraft einen Theil des Verlustes wieder aufhob.

„Sie beweisen sämmtlich, dass der Zustand des permanenten Moments, welcher aus einer Stromunterbrechung hervorgeht, durchaus verschieden ist von demjenigen, welcher Folge einer Erschütterung oder eines conträren Stromes oder einer Anzahl von verschieden gerichteten Strömen ist.“

§ 5. Bei allen bisher beschriebenen Versuchen wurde

die prüfende Kraft, sei es dass sie das *PM* wieder vergrösserte oder noch mehr schwächte, plötzlich von Null bis zu ihrem vollen Werthe gesteigert: man schloss den Strom erst dann, wenn der gewünschte Rheostatenwiderstand bereits eingeschaltet war, und der Eisenkörper sich in der Magnetisirungsspirale befand. Es schien nun denkbar, dass diese plötzliche Einwirkung der Kraft auf die Verschiedenheit der Momente nach Stromunterbrechung, Erschütterung oder conträrem Strom von Einfluss war, ja dass eine solche Verschiedenheit vielleicht gar nicht mehr auftreten würde, wenn man nur die prüfende Kraft *langsam* von Null bis zu ihrem vollen Werthe ansteigen liesse. Es geschah dies bei den folgenden Versuchen in der Weise, dass der Strom geschlossen wurde, während ausser dem gewünschten Rheostatenwiderstand noch ein grosser Flüssigkeitswiderstand eingeschaltet war, den man dann allmählich entfernte.

Tabelle 14.

Eisenstab 15 cm lang, 0,7 cm dick. *PM* Max. = 362 wurde geschwächt durch Stromunterbrechung um 161 oder durch einen conträren Strom um 157 oder durch Erschütterung um 152. Die prüfende Kraft war $W = 200$, vergrösserte wieder die bestehende Magnetisirung und wurde entweder langsam oder rasch zur vollen Wirkung gesteigert.¹⁾

Anzahl d. Wirk. d. prüf. Kraft	Schwächung des <i>PM</i> durch									
	Stromunterbrechung				conträren Strom				Erschütterung	
	Rasche W.		Langs. W.		Rasche W.		Langs. W.		Rasche W.	
	<i>GM</i>	δ . <i>PM</i>	<i>GM</i>	δ . <i>PM</i>	<i>GM</i>	δ . <i>PM</i>	<i>GM</i>	δ . <i>PM</i>	<i>GM</i>	δ . <i>PM</i>
1	262,4	17,6	249,9	14,8	264,3	55,9	254,4	51,0	239,6	34,2
2	237,4	21,4	226,7	18,1	262,2	56,5	253,6	52,5	236,6	34,6
3	229,1	22,6	221,0	18,5	261,5	57,0	253,5	53,0	236,1	34,8
4	225,6	23,1	219,5	18,9						
5	223,9	23,0	217,5	19,0						

Diese Versuche zeigen, dass eine Kraft, welche im Sinne der bestehenden Magnetisirung wirkt, in jedem Falle, sie mag rasch oder langsam zu ihrem vollen Werth ansteigen, verschiedene Momente inducirt und *PM* um verschiedene Beträge ändert, je nachdem *PM* durch Stromunterbrechung, Erschütterung oder einen conträren Strom reducirt worden war. Die Ge-

1) Die Zurückführung der Kraft auf Null geschah dagegen nur langsam.

schwindigkeit der Wirkung ist auch auf die Reihenfolge der GM und der $\delta.PM$ ohne Einfluss: immer wird das grösste GM nach einem conträren Strom und das kleinste nach einer Erschütterung inducirt, immer findet sich die grösste Zunahme des PM nach einem conträren Strom und die kleinste nach einer Stromunterbrechung. Dagegen ist, wie bereits in der 3. Abhandlung beschrieben, das GM wie das $TM = GM - PM$ grösser bei raschem als bei langsamen Ansteigen der Kraft, und die Versuche zeigen weiter, dass entsprechend dem grösseren GM dann auch $\delta.PM$ grösser ausfällt.

§ 6. Die Versuche haben also zu folgenden Hauptresultaten geführt:

1. Der Zustand, in welchem sich das permanente Moment eines Eisenkörpers nach raschem Abfall der magnetisirenden Kraft auf Null (Stromunterbrechung) befindet, unterscheidet sich wesentlich von denjenigen beiden Zuständen, in welche es durch eine in conträrer Richtung wirkende Kraft oder durch Erschütterungen gelangt.

2. Die letzteren beiden Zustände sind im Allgemeinen ebenfalls von einander verschieden, nur bei Bündeln dünner Eisendrähte sind sie identisch.

3. Die Verschiedenheit der drei Zustände ergibt sich sowohl aus den ungleichen temporären Momenten, welche eine Kraft inducirt, als auch aus den ungleichen Aenderungen des permanenten Moments, welche eine Kraft hervorbringt, sie mag in der Richtung der vorherigen Magnetisirung oder in der entgegengesetzten wirken.

4. Sucht die Kraft das frühere PM wieder herzustellen, so inducirt sie bei Drahtbündeln nach einer Stromunterbrechung zwar das grösste Moment, bringt aber die kleinste Zunahme des permanenten Moments hervor. Bei Eisenstäben dagegen ist sowohl das inducirte als auch die Zunahme des permanenten Moments am grössten, wenn eine Schwächung des PM durch eine conträre Kraft stattgefunden hatte; etwas kleiner ist das inducirte Moment nach einer Stromunterbrechung und am kleinsten nach Erschütterungen. Die Zunahme des permanenten Moments ist dagegen bei Stäben am geringsten nach einer Stromunterbrechung.

5. Wirkt die Kraft dagegen in der der ursprünglichen

Magnetisirung entgegengesetzten Richtung, so ist das inducirte Moment und die Abnahme des permanenten am grössten nach Stromunterbrechung und im allgemeinen am kleinsten nach Wirkung eines conträren Stroms.

6. Die auszeichnenden Merkmale des magnetischen Zustandes, welcher aus einer Stromunterbrechung hervorgegangen ist, sind einmal die kleine Zunahme, welche PM durch eine gleichgerichtete Kraft, und die grosse Abnahme, welche es in Folge einer entgegengerichteten Kraft erfährt, und zweitens das anfänglich grosse verschwindende Moment, welches nur durch Wiederholung der Kraftwirkung den normalen Werth erreicht.

7. Durch den zweiten Punct unterscheidet sich dieser Zustand auch wesentlich von demjenigen, welcher aus der Wirkung einer Reihe von abwechselnd gleich- und entgegengerichteten Kräften entsteht, obwohl dieser ebenfalls unter Umständen ein grösseres Maass von Stabilität gegenüber den PM erhöhenden Kräften besitzt.

8. Die beiden in 6) genannten Merkmale zeigt auch derjenige Zustand des permanenten Magnetismus, welcher durch rasche aber immer noch continuirliche Einschaltung von Flüssigkeitswiderständen in den Stromkreis entsteht (cf. die 6. Abh.)

9. Die Kraft, welche das durch Stromunterbrechung, conträren Strom oder Erschütterung reducirte PM wieder erhöht, kann man langsam oder rasch von Null bis zu ihrer vollen Stärke anwachsen lassen; die beschriebenen Unterschiede der drei Zustände des PM ergeben sich in beiden Fällen.

10. Wenn zu dem durch Stromunterbrechung bewirkten Verlust an PM noch ein weiterer durch einen conträren Strom oder durch Erschütterung hinzutritt, so verschwindet in dem neuen Zustand des PM der Einfluss der Stromunterbrechung um so vollständiger, je stärker der conträre Strom oder die Erschütterung waren.

11. Je grösser der dem PM durch Erschütterungen oder conträren Strom zugefügte Verlust ist, desto grösser ist auch die Zunahme, welche eine folgende, PM wieder hebende Kraft hervorbringt. Wenn dagegen der Verlust durch Stromunterbrechung entstanden ist, so kann dem grösseren Verlust die kleinere Zunahme entsprechen.

§ 7. Die vorstehend geschilderten Resultate besitzen un-

zweifelhaft grossen Werth für die Erkenntniss der molecularen Vorgänge in den magnetisirbaren Körpern. Ich will im Folgenden versuchen zu bestimmen, wodurch der aus rascher Abnahme der magnetisirenden Kraft hervorgegangene Zustand des permanenten Moments molecularmagnetisch von anderen Zuständen sich unterscheidet.

Die Bezeichnung „Zustand“ habe ich in der 5. Abhandlung eingeführt als Ausdruck dafür, dass ein gleich grosses permanentes Moment durch die gleiche magnetisirende Kraft um ganz verschiedene Grössen geändert werden kann, sowohl temporär als permanent. Man sieht schon aus dem im Eingang des § 1 angezogenen Falle, dass ein permanentes Moment bei gleicher Grösse in einer sehr grossen Menge von Zuständen existiren kann; im Besonderen ging dies auch aus den Versuchen der 5. Abhandlung hervor. In dieser wurde nun als innerer Grund dieser Verschiedenheit eine wechselnde Gruppierung der Molecularmagnete bezeichnet, welche man sich unendlich verschieden denken kann, auch ohne dass die Grösse des permanenten Moments sich ändert. Lässt man magnetisirende Kräfte in aufsteigender Reihe wirken, so drehen sich die Molecularmagnete permanent mehr und mehr der Richtung der magnetisirenden Kraft zu. Aber nebenher geht noch eine Aenderung in der gegenseitigen Lage der Molecularmagnete, derart dass einer jeden Kraft auch eine besondere Gruppierung derselben entspricht, und es gilt das auch noch für diejenigen grossen Kräfte, welche keine Zunahme des permanenten Moments mehr hervorbringen. Sie bewirken wenigstens noch eine Umstellung der Gruppen, wie daraus hervorgeht, dass (5. Abhandlung) eine kleinere Kraft das maximale PM um verschiedene Beträge ändert je nach der Kraft, durch welche es erzeugt war.

Beginnen wir mit der Betrachtung derjenigen Kräfte, welche das geschwächte PM noch mehr zu verkleinern streben (§ 4). Ihre Wirkung ist am kleinsten, wenn der erste Verlust ebenfalls Folge eines conträren Stromes war, und er ist besonders klein dann, wenn der zweite Strom dem ersten an Grösse bedeutend nachsteht (Tab. 12). Das ist unschwer zu erklären. Denn die erste conträre Kraft ändert gewisse Gruppen von Molecularmagneten, während in anderen die Drehung der Magnete keine permanente Umgestaltung der Gruppen

nach sich zieht. Wirkt nun eine zweite, aber kleinere conträre Kraft, so bleiben die letzteren Gruppen auch jetzt permanent ungeändert, und in den ersteren sind die Drehungen der Molecularmagnete desshalb grösstentheils nur temporär, weil diese Gruppen von der vorhergegangenen *grösseren* Kraft gebildet waren.

Grösser fällt die Wirkung der zweiten conträren Kraft schon aus, wenn sie, wie in Tab. 13, die erste übertrifft, und das ist nach dem eben Gesagten sehr erklärlich. Aber immer bleibt ihre Wirkung auf *PM* bedeutend hinter derjenigen zurück, welche sie nach vorhergegangener Schwächung des *PM* durch Stromunterbrechung ausübt. Stromunterbrechung gruppirt offenbar die Molecularmagnete in einer Weise, welche total verschieden ist von der durch conträren Strom erzeugten, und ebenso wie die plötzliche Stromunterbrechung wirkt rasche continuirliche Vergrösserung eines in den Stromkreis eingeschalteten Flüssigkeitswiderstands. Hierbei schwingen ebenfalls die Molecularmagnete mit einer gewissen Geschwindigkeit zurück und haben bei der lebhaften Bewegung Gelegenheit, sich zu anderen Gruppen zusammenzuschliessen. Hält man dann mit der raschen Einschaltung von Widerstand ein und fügt weiteren Widerstand nur langsam hinzu, so entsprechen die nun noch vorhandenen temporären Drehungen der Molecularmagnete schon anderen Ruhelagen.

Ich bin der Ansicht, dass gerade bei der raschen Abnahme der Stromstärke, sei es durch Unterbrechung des Kreises oder nur durch rasche Einschaltung von Widerstand, die Gruppierung der Molecularmagnete infolge der lebhaften Bewegung, in welche sie dabei gerathen, eine durchgreifende Aenderung erfährt, während ein conträrer Strom zwar ebenfalls die Gruppierung ändert, aber doch vorzugsweise nur die Molecularmagnete in den bestehen bleibenden Gruppen zurückdreht. Es ist dies aus der enormen Abnahme des verschwindenden Moments zu schliessen, welche ausschliesslich nach einer Stromunterbrechung bei wiederholter Wirkung der Kraft beobachtet wurde, und welche nicht anders zu erklären ist, als durch eine Wiederumlagerung der Gruppen.

Die Aenderung, welche das durch Erschütterungen geschwächte *PM* durch eine folgende, sei es *PM* wieder vergrössernde, sei es noch mehr verkleinernde Kraft erhält, steht bei Stäben zwischen den Aenderungen, welche nach Wir-

kung einer Stromunterbrechung und eines conträren Stroms beobachtet werden, während freilich bei Drahtbündeln die durch Erschütterung und conträren Strom erhaltenen Zustände des PM merklich einander gleich waren. In der That wird man sich vorstellen können, dass durch Erschütterungen des Stabes die Molecularmagnete in eine ähnlich lebhaftere Bewegung wie durch eine Stromunterbrechung gerathen, und dass infolgedessen eine theilweise Umformung der Gruppen eintritt. Bei Stäben würde dann die Stabilität der Gruppen gegenüber Erschütterungen geringer als bei Drahtbündeln sein müssen. Doch muss die Umformung eine erheblich weniger durchgreifende als durch Stromunterbrechung sein, wie einestheils aus dem Verhalten der Drahtbündel, anderentheils daraus hervorgeht, dass nach einem Verlust durch Erschütterung die Abnahme der temporären Momente bei wiederholter Wirkung der Kraft nur gering ist.

Eine grössere Kraft P erzeuge ein gewisses PM , dasselbe werde dann auf irgend eine Weise auf einen kleineren Werth pm reducirt, und nun lasse man eine kleinere Kraft p in der Richtung der früheren wirken. pm nimmt dann im Allgemeinen wieder zu¹⁾ und zwar um einen desto grösseren Betrag, je grösser PM gewesen war, je grössere Kräfte also vorher schon gewirkt hatten. Wenn wir nun beobachten, dass die Zunahme des permanenten Moments am geringsten ist, wenn es vorher durch Stromunterbrechung reducirt war, so verhält es sich also gerade so, wie wenn der Körper dann vorher weniger grossen Kräften unterworfen gewesen wäre, mit anderen Worten, durch Stromunterbrechung hat sich die Gruppierung der Molecularmagnete derjenigen des unmagnetischen Zustandes mehr genähert als durch Erschütterung oder gar durch conträren Strom. Das ändert sich wieder, sobald wir nach der Stromunterbrechung den Körper erschüttern oder der Wirkung eines conträren Stromes unterwerfen. Die Gruppierung wird mit der neuen Schwächung des permanenten Momentes nochmals eine andere, indem sie sich derjenigen annähert, welche allein durch Erschütterung oder conträren Strom erzeugt wird.

Giessen, Math.-Phys. Inst. Februar 1892.

1) Dass pm auch abnehmen kann ist im § 3 gezeigt worden.

Verhandlungen

der

Physikalischen Gesellschaft zu Berlin.

Sitzung vom 26. Februar 1892.

Vorsitzender: Hr. A. KUNDT.

Hr. F. Neesen trägt vor
über Messung von Verdampfungswärmen.

Hr. M. Thiesen spricht dann:

1. Ueber vollkommene Diopter.

Im Anschlusse an den in einer früheren Veröffentlichung¹⁾ eingeführten Sprachgebrauch wird als *vollkommenes Diopter* eine Reihe von durchsichtigen Medien bezeichnet, durch welche eine scharfe dioptrische Abbildung einer Fläche, welche in einem isotropen homogenen Medium liegt, auf einer anderen conjugirt genannten Fläche bewirkt wird, wenn diese einer gleichen Bedingung genügt. Der Vortragende beschränkt sich auf die Behandlung des speciellen Falles, in welchem die conjugirten Flächen Ebenen sind und eine geometrisch ähnliche Abbildung dieser Ebenen aufeinander stattfindet; der allgemeine Fall bietet indessen keinerlei Schwierigkeit.

Die Wirkung eines Diopters ist vollständig durch die Zeit bestimmt, in welcher das Licht von einem beliebigen Punkte der einen zu einem Punkte der anderen Grenzfläche des Diopters gelangt. Diese als Charakteristik des Diopters bezeichnete Grösse ist im allgemeinen eine Function von vier Variabeln, welche die Lage der Punkte in den beiden Flächen bestimmen. Für ein vollkommenes Diopter, dessen Grenzen überdies mit den conjugirten Flächen zusammenfallen, entartet aber die Charakteristik. Da jedem Punkte der einen Fläche nur ein bestimmter Punkt der conjugirten Fläche entspricht, so bestehen zwei Bedingungsgleichungen zwischen den vier Variabeln, welche die beiden Punkte bestimmen, die Charakteristik reducirt sich auf eine Function von zwei Variabeln und

1) M. THIESEN, Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1890. p. 799.

zur vollständigen Bestimmung des Diopters müssen noch die Bedingungsleichungen hinzugefügt werden, welche die Abbildung der conjugirten Flächen aufeinander kennzeichnen.

Wendet man diese Betrachtungen auf den speciellen Fall an, bezeichnet man die beiden conjugirten Ebenen mit (1), (2) und die Charakteristik des durch diese Ebenen begrenzten Diopters mit T_{12} und nennt man γ das constante Verhältniss zwischen zwei in den Ebenen (1) und (2) einander entsprechenden Strecken, so ist bei passender Wahl von rechtwinkligen Coordinatensystemen in den beiden Ebenen die Wirkung des Diopters vollständig bestimmt durch:

$$(1) \quad T_{12} = F(x_1, y_1);$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_2 = \gamma x_1; \\ y_2 = \gamma y_1. \end{cases}$$

Da die Function F völlig unbestimmt bleibt, so ist die Zahl der Diopter, welche die verlangte Eigenschaft haben, eine unendlich grosse.

Wählt man als Grenzflächen des Diopters zwei neue bezüglich zu (1) und (2) parallele und mit diesen in demselben homogenen isotropen Medium gelegene Ebenen (0) und (3), so werden zunächst die Charakteristiken der hinzutretenden Stücke bei leicht verständlichen Bezeichnungen:

$$T_{01} = n_{01} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + e_{10}^2},$$

$$T_{23} = n_{23} \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + e_{32}^2},$$

und demnach durch Addition

$$(3) \quad \begin{aligned} T_{03} = F(x_1, y_1) + n_{01} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + e_{10}^2} \\ + n_{23} \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + e_{32}^2}. \end{aligned}$$

In diesem letzteren Ausdrucke sind noch die Coordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 durch x_0, y_0, x_1, y_1 zu ersetzen. Zunächst kann man x_2 und y_2 durch die Gleichungen (2) eliminiren, sodann aber den Grundsatz anwenden, dass das Licht stets auf einem solchen Wege von einem Punkte zu einem anderen gelangt, dass eine kleine Aenderung dieses Weges keine Aenderung der Zeitdauer bedingen würde. Es muss also T_{03} bei einer kleinen Verschiebung des Punktes (x_1, y_1) ungeändert bleiben und man erhält

$$\begin{aligned}
 (4) \quad o &= \frac{\partial F}{\partial x_1} + n_{01} \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + e_{10}^2}} - \gamma n_{23} \frac{x_3 - x_2}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + e_{23}^2}}; \\
 o &= \frac{\partial F}{\partial y_1} + n_{01} \frac{y_1 - y_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + e_{10}^2}} - \gamma n_{23} \frac{y_3 - y_2}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + e_{23}^2}}.
 \end{aligned}$$

Der Ausdruck (3), in welchem die Grössen x_1, y_1, x_2, y_2 durch die Gleichungen (2) und (4) eliminirt sind, entspricht der allgemeinsten Form der Charakteristik des speciellen Diopters bezogen auf zwei den conjugirten parallele Ebenen.

Die hingeschriebenen Gleichungen erlauben nun auch leicht, die allgemeinsten Eigenschaften des betrachteten Diopters abzuleiten. Die Gleichungen (4) sagen aus, dass zwischen den Cosinus der Winkel, welchen die in einem Punkte der einen conjugirten Ebene mit einer in dieser Ebene liegenden Richtung bilden und den entsprechenden Cosinus des austretenden Strahlenbüschels eine lineare Beziehung besteht. Die specielle Wahl von F bestimmt beispielsweise das austretende Strahlenbüschel, welches einem parallelstrahlig in das Diopter eintretenden entspricht; ist dies Strahlenbüschel gegeben, so lässt sich leicht zu jedem eintretenden Strahle der austretende construiren.

Aehnliche Sätze über den Strahlengang durch ein vollkommenes Diopter, die aber doch noch nicht ganz ausreichend sind, um den Strahlengang vollständig zu bestimmen, sind schon früher veröffentlicht worden. Ein von CLAUDIUS¹⁾ herrührender Satz ergibt sich durch Differentiation der Gleichungen (4) bei constant bleibenden x_1, y_1, x_2, y_2 ; das noch speciellere von ABBE²⁾ und v. HELMHOLTZ³⁾ aufgestellte sogenannte Sinusgesetz gilt nur, falls $\partial F / \partial x_1$ und $\partial F / \partial y_1$ gleich Null gesetzt werden können, d. h. falls einem senkrecht einfallenden ein senkrecht austretender Strahl entspricht.

2. Ueber die Construction von Dioptern mit gegebenen Eigenschaften.

Die Eigenschaften eines Diopters werden durch seine Charakteristik bestimmt; man kann daher von vornherein die Forderung stellen: diejenige Reihe von durchsichtigen Medien anzugeben, deren Gesammtheit eine gegebene Charakteristik zukommt.

1) R. CLAUDIUS, Pogg. Ann. 121. p. 1. 1864.

2) E. ABBE, Archiv für mikroskopische Anatomie. 1874.

3) H. v. HELMHOLTZ, Pogg. Ann. Jubelband. p. 566. 1874.

Ob diese Forderung sich allgemein erfüllen lässt, ist streitig; der Vortragende glaubt es, aber ohne einen strikten Beweis dafür zu haben; andererseits hat Hr. ABBE die Behauptung aufgestellt¹⁾, dass die Construction vollkommener Diopter im Sinne des vorangehenden Vortrages unmöglich sei, während sich doch die Charakteristik solcher Diopter angeben lässt. Die früher veröffentlichte Angabe, Hr. ABBE habe einen angeblichen Beweis dieser Behauptung gegeben, beruhte dagegen auf einem Irrthum des Vortragenden.

Jedenfalls muss zur Entscheidung der Frage die Natur der Medien, aus denen das Diopter zu bilden ist, weiter beschränkt werden. Lässt man Medien zu, in denen die Lichtgeschwindigkeit beliebig von der Richtung abhängt, so lässt sich ohne weiteres ein Medium, und zwar ein homogenes, angeben, welchem zwischen bestimmten Grenzen eine gegebene Charakteristik zukommt. Lässt man dagegen nur isotrope Medien zu, die aber continuirlich ineinander übergehen dürfen, so lässt sich die Aufgabe in folgende Fassung bringen:

Es ist eine Function der Variablen x, y, z, x_0, y_0 zu suchen, der Art, dass *erstens*

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 = n^2$$

von x_0 und y_0 unabhängig ist;

zweitens, wenn z gleich einer gegebenen Function von x und y gesetzt wird, welche die Vorderfläche des Diopters bestimmt, T für $x = x_0, y = y_0$ verschwindet;

drittens, wenn z gleich einer anderen gegebenen Function von x und y gesetzt wird, welche die Hinterfläche des Diopters bestimmt, T gleich der als Function von x, y, x_0, y_0 gegebenen Charakteristik wird.

Ist diese Aufgabe gelöst, so sind die Brechungsexponenten der gesuchten Medien mit n proportional.

Der Vortragende glaubt, dass die Lösung der Aufgabe immer, und zwar bei Zulassung discontinuirlicher Lösungen auf unendlich verschiedene Art möglich sein muss.

Vereinfachungen ergeben sich, falls man sich auf Systeme beschränkt, welche eine Axe haben.

4) E. ABBE, Carl's Repertorium. 16. p. 306.

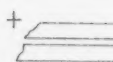
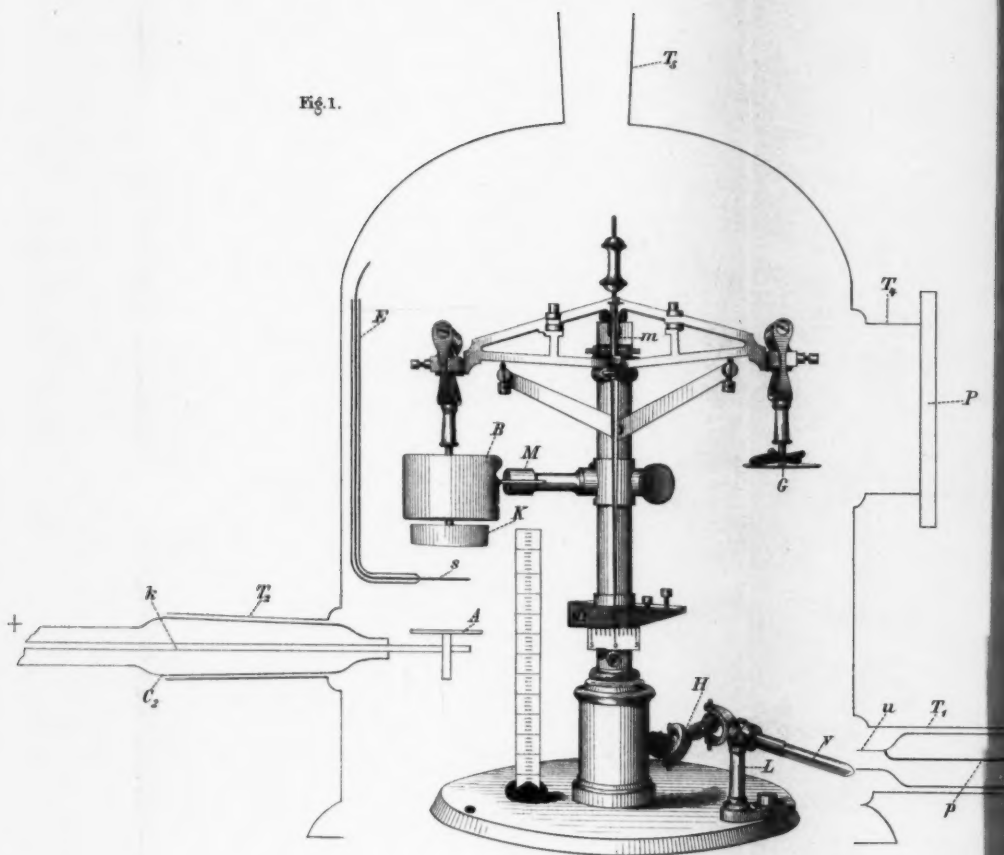
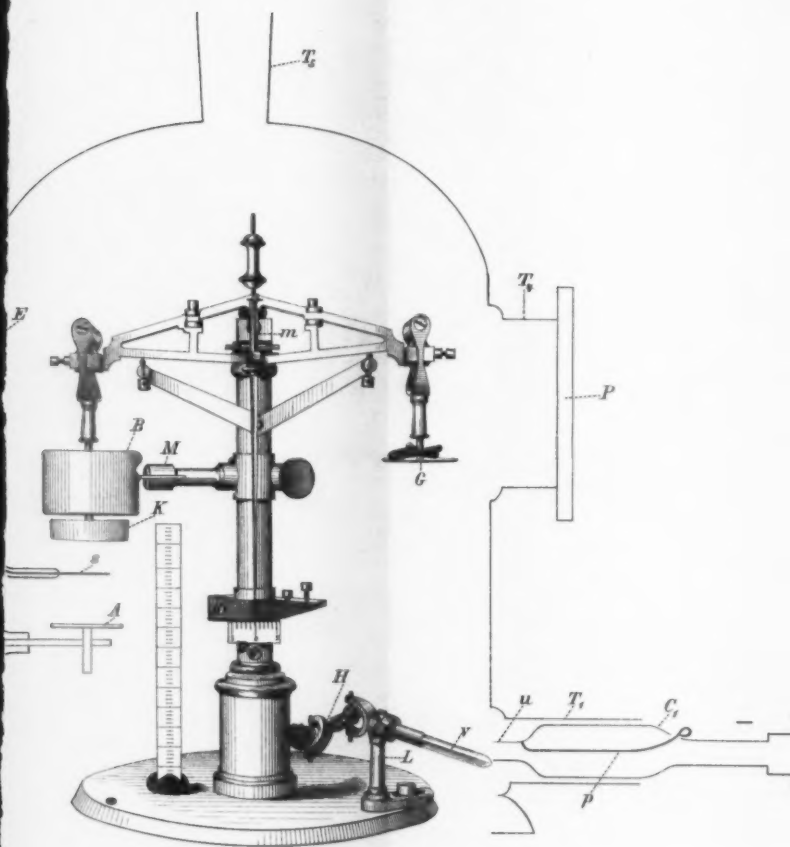


Fig. 1.





Warburg Fig. 1. Abt Fig. 2-4.

Fig. 2.

Taf. I.

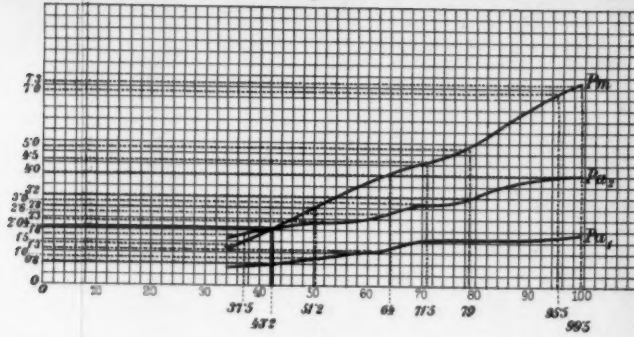


Fig. 3.

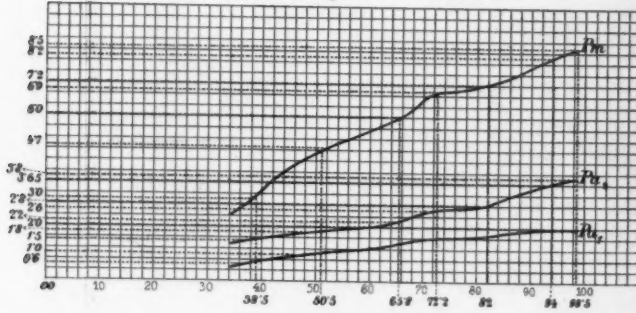
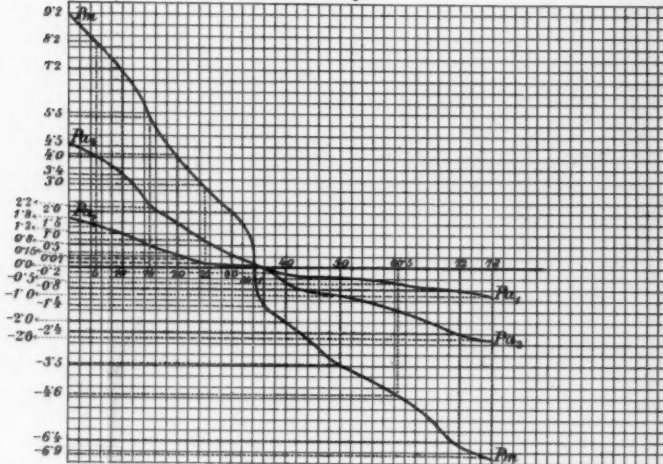
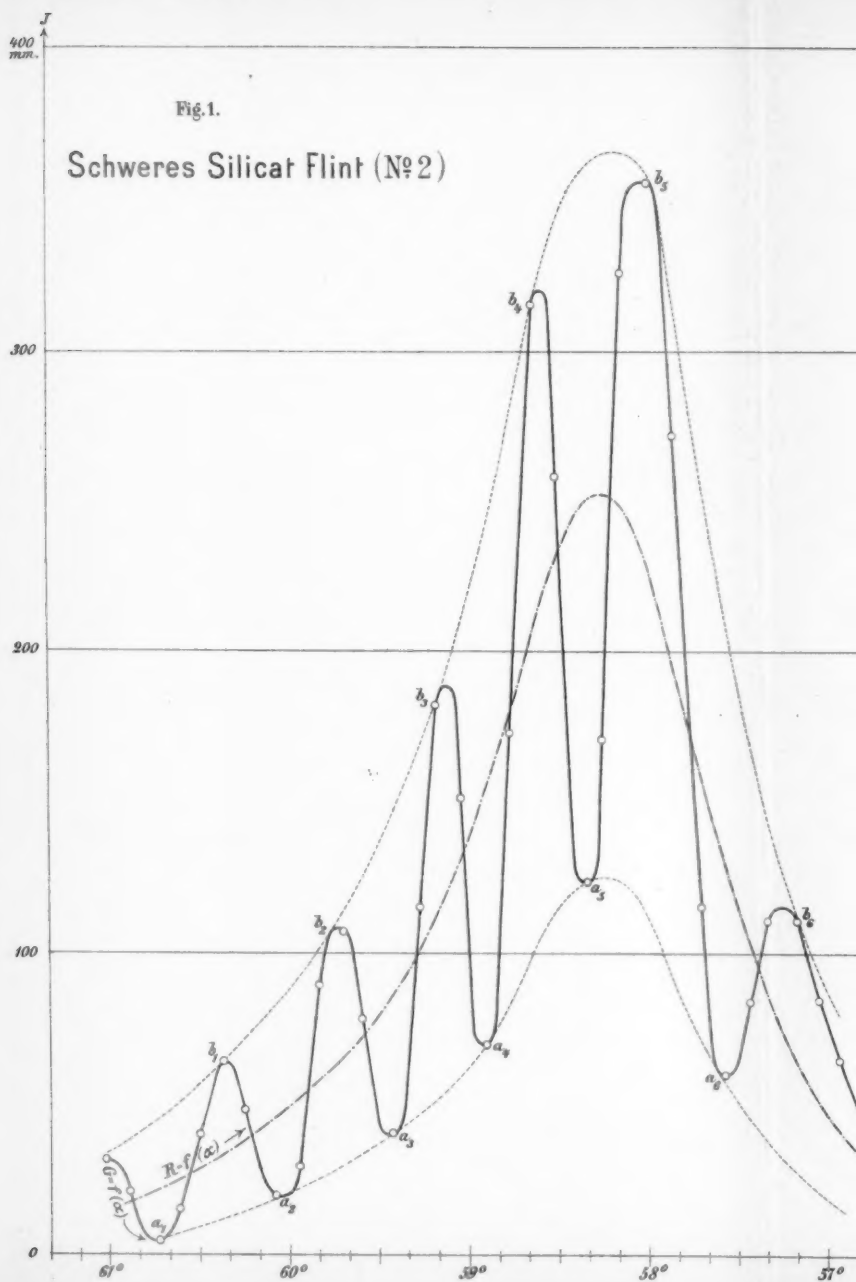


Fig. 4.



Lith. Anst. v. C. Krosch, Leipzig.



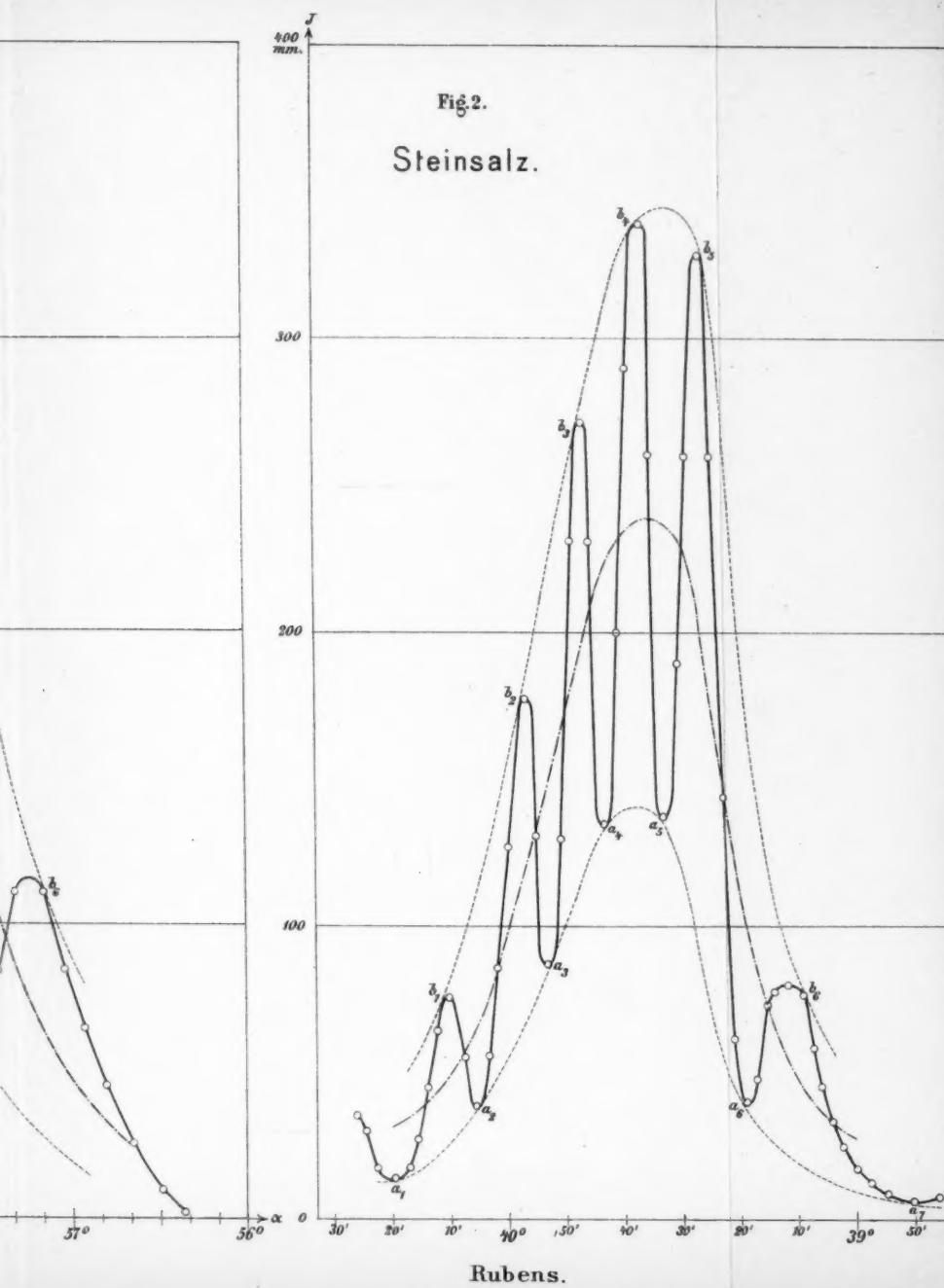


Fig. 2.
Steinsalz.

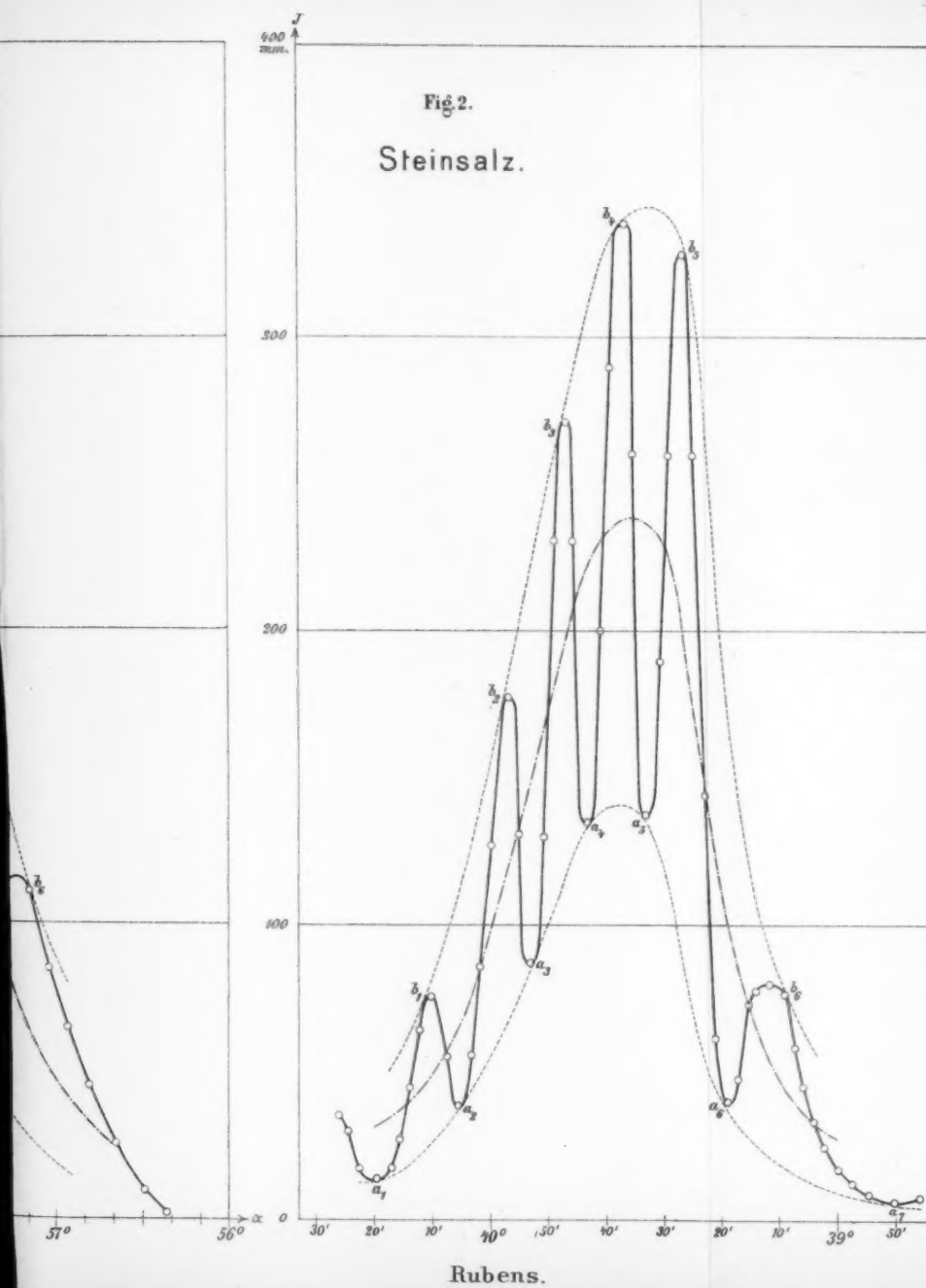
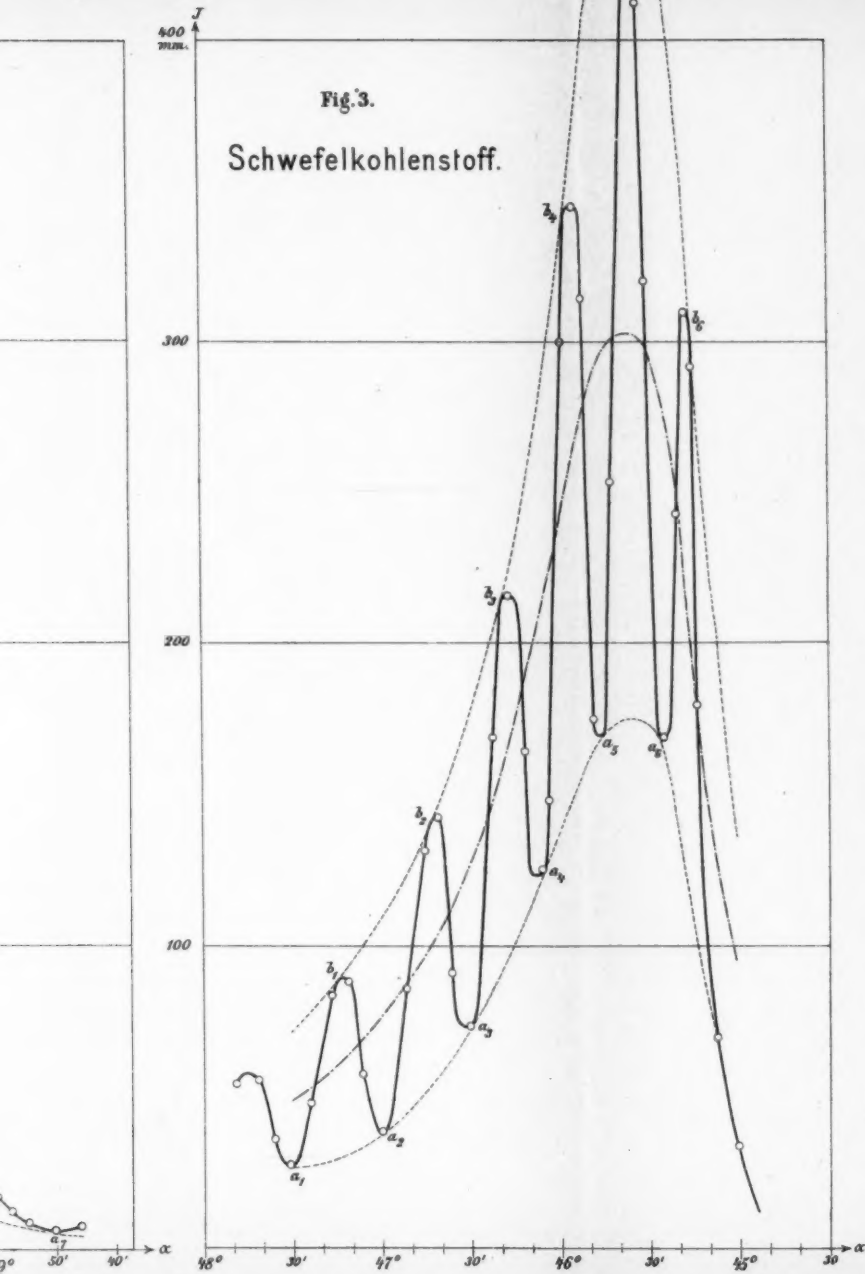
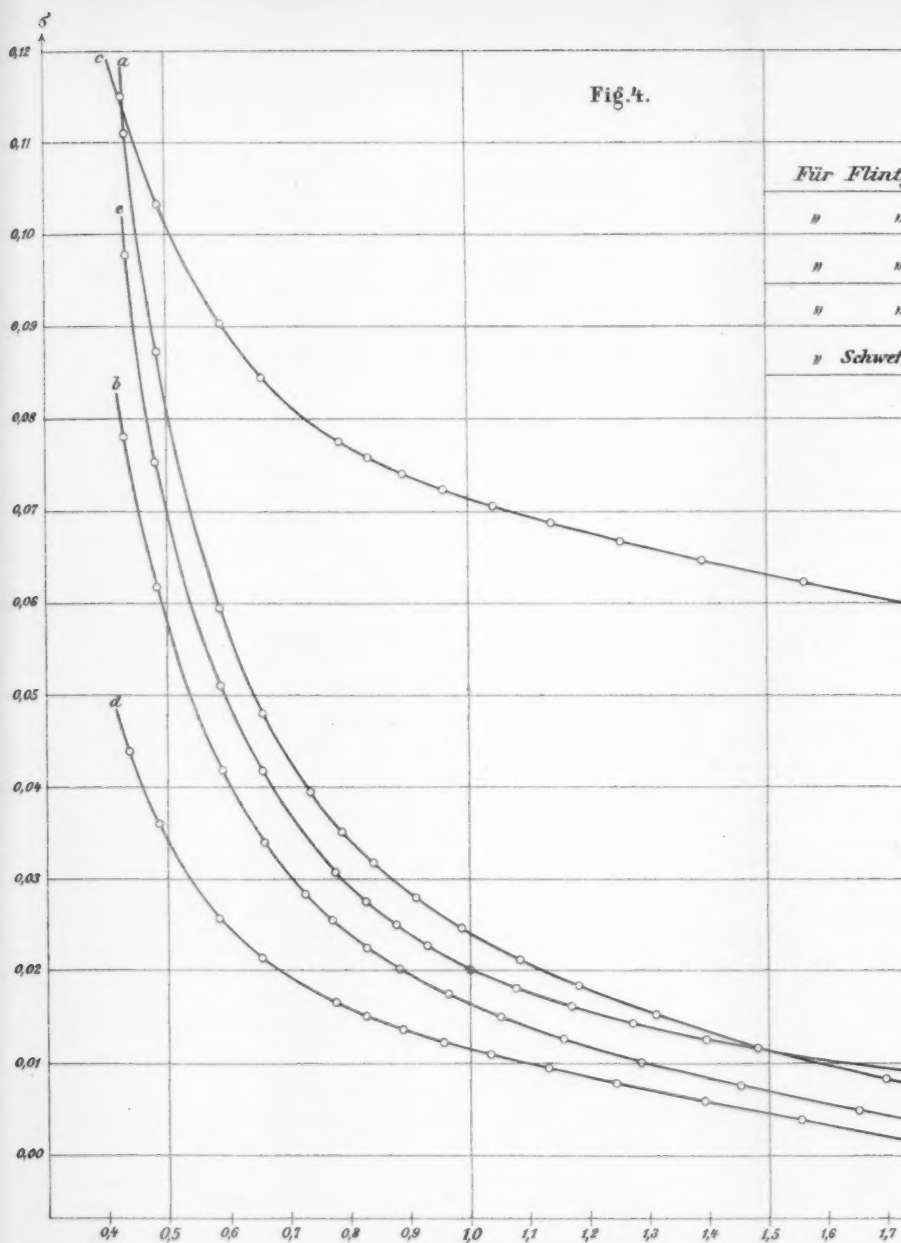


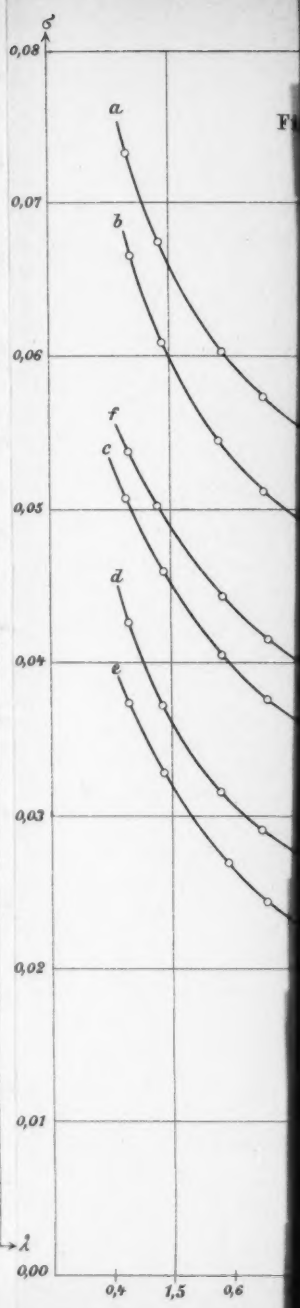
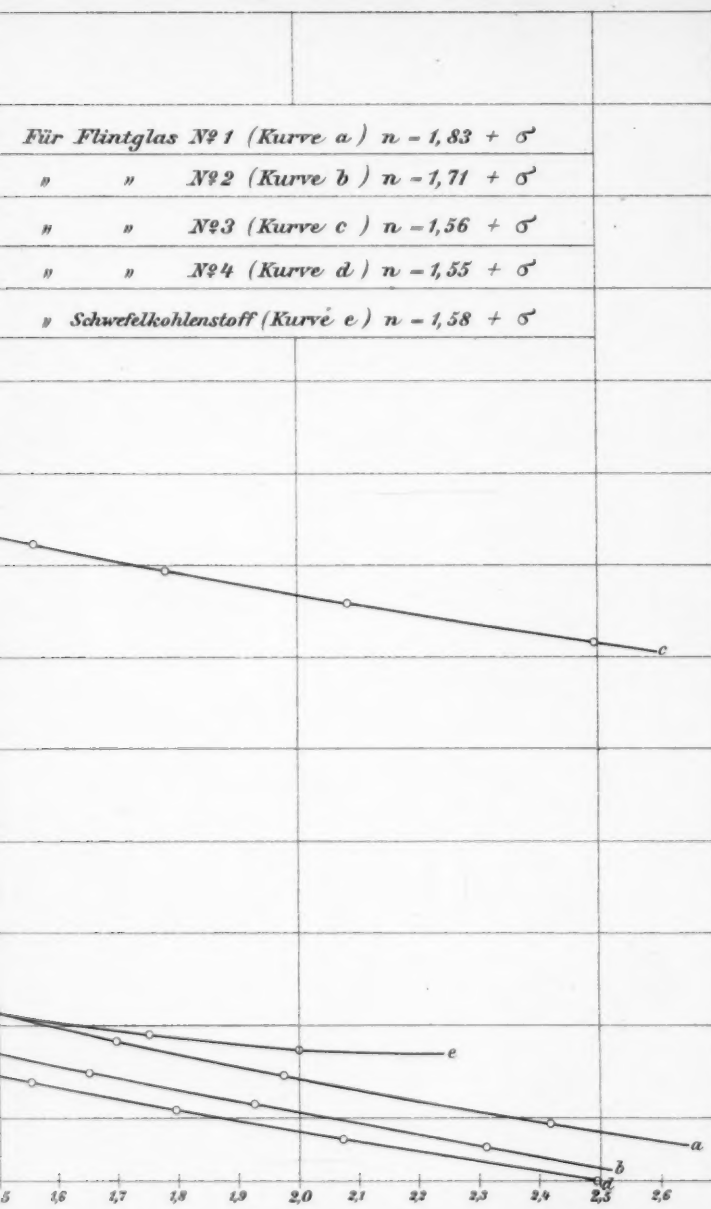
Fig. 3.

Schwefelkohlenstoff.



Lith. Anst. v. C. Kirst, Leipzig.





Rubens.

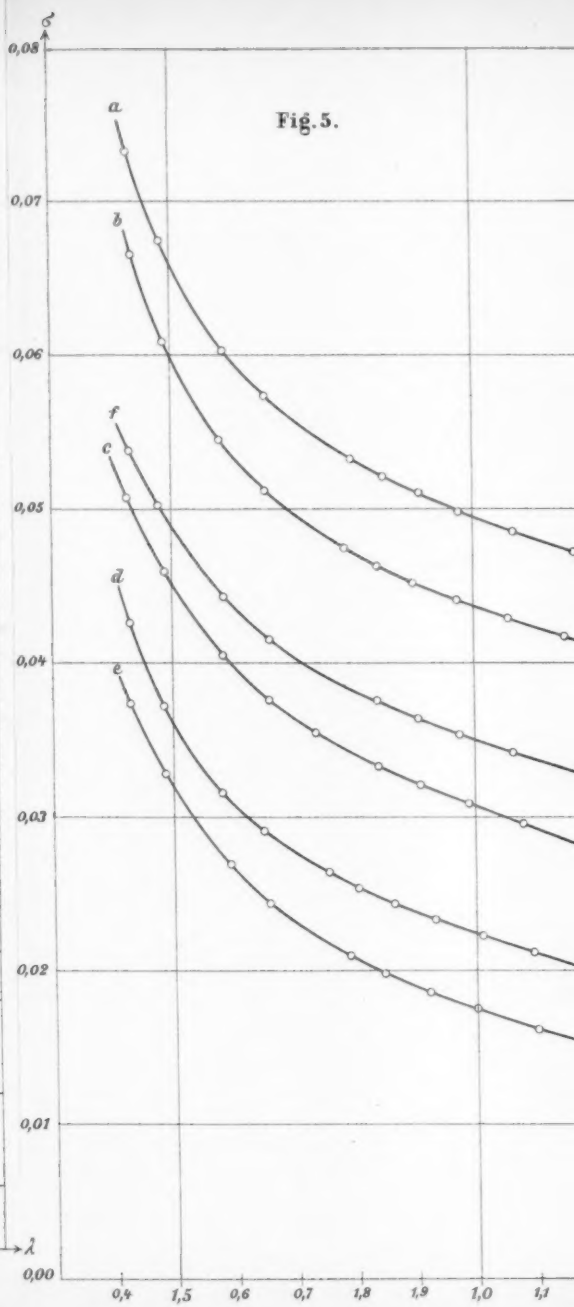
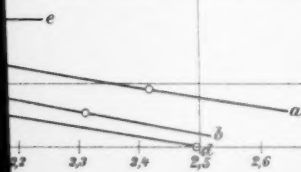
$$n = 1,83 + \sigma$$

$$n = 1,71 + \sigma$$

$$n = 1,56 + \sigma$$

$$n = 1,55 + \sigma$$

$$n = 1,58 + \sigma$$



Rubens.

Für Glas N^o 5 (Kurve a) $n = 1,46 + \sigma'$

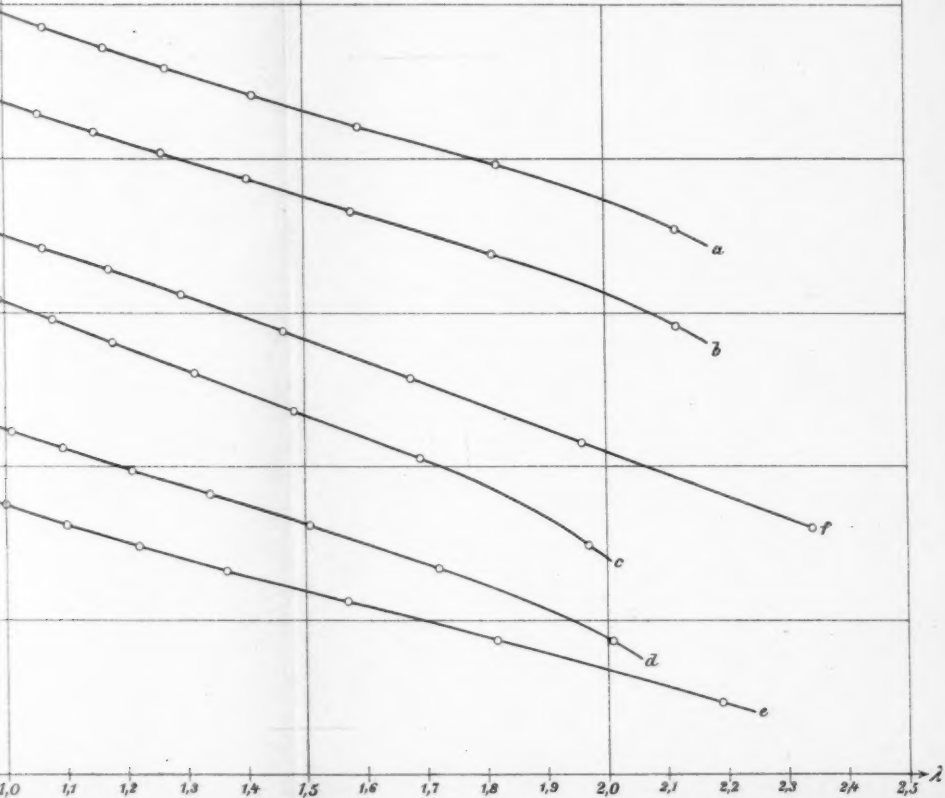
" " N^o 6 (Kurve b) $n = 1,50 + \sigma'$

" " N^o 7 (Kurve c) $n = 1,47 + \sigma'$

" " N^o 8 (Kurve d) $n = 1,53 + \sigma'$

" " N^o 9 (Kurve e) $n = 1,49 + \sigma'$

" Quarz (Kurve f) $n = 1,50 + \sigma'$



Lith. Anst. v. C. Kirst, Leipzig.

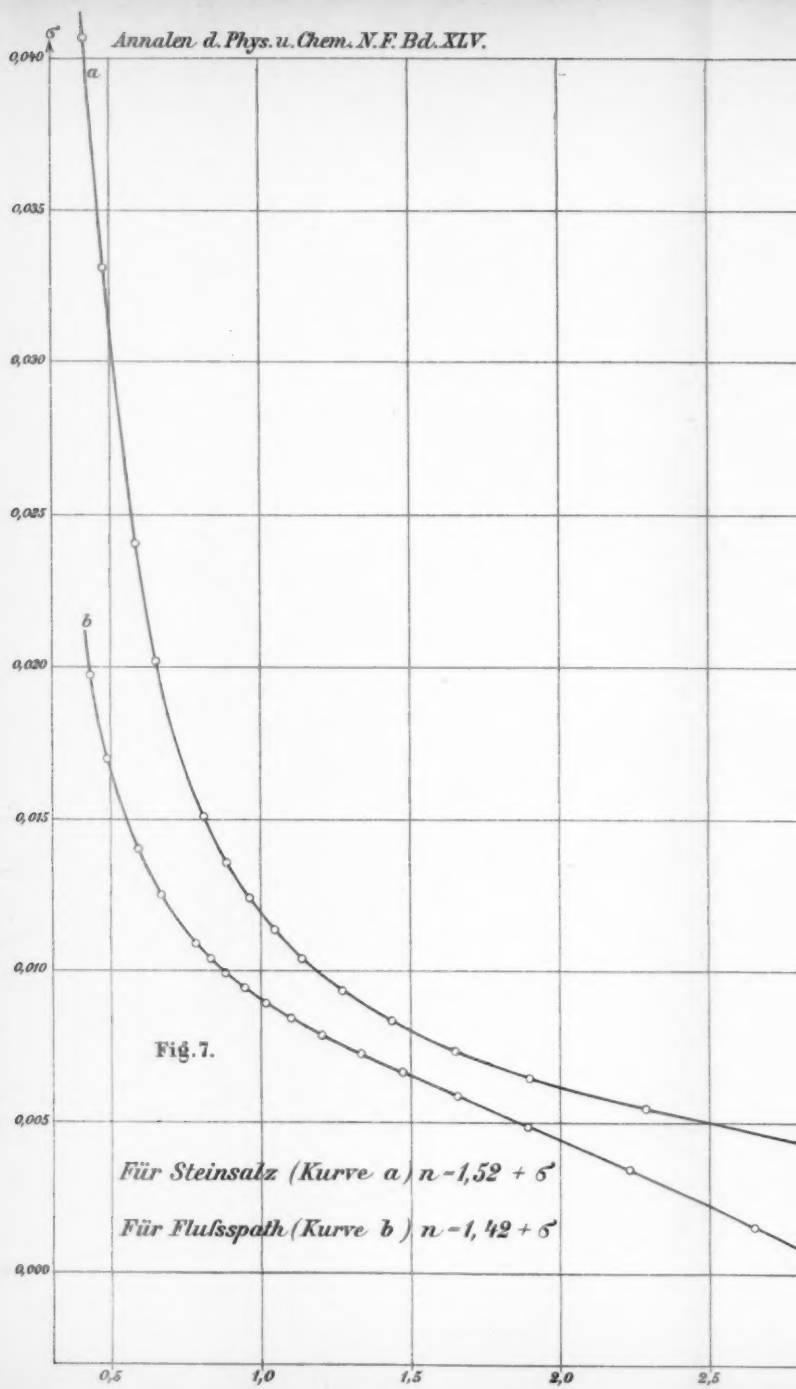
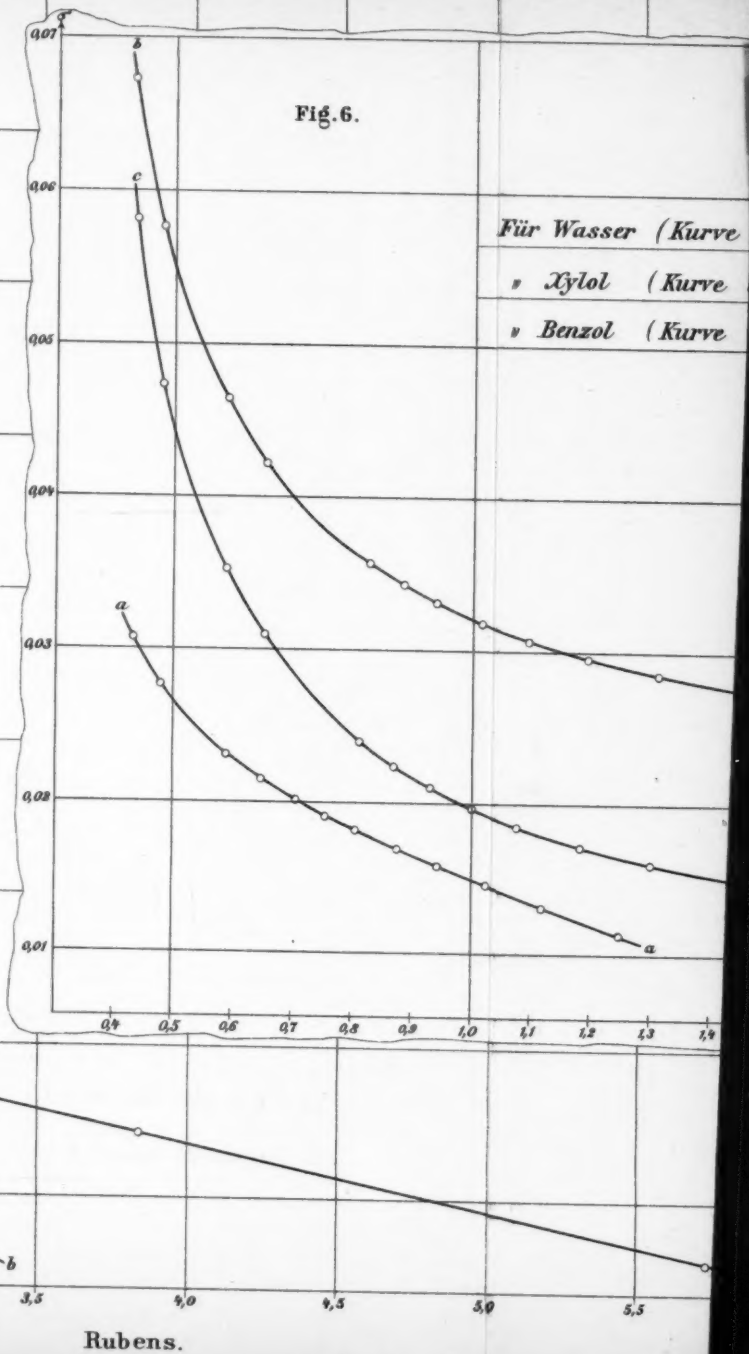


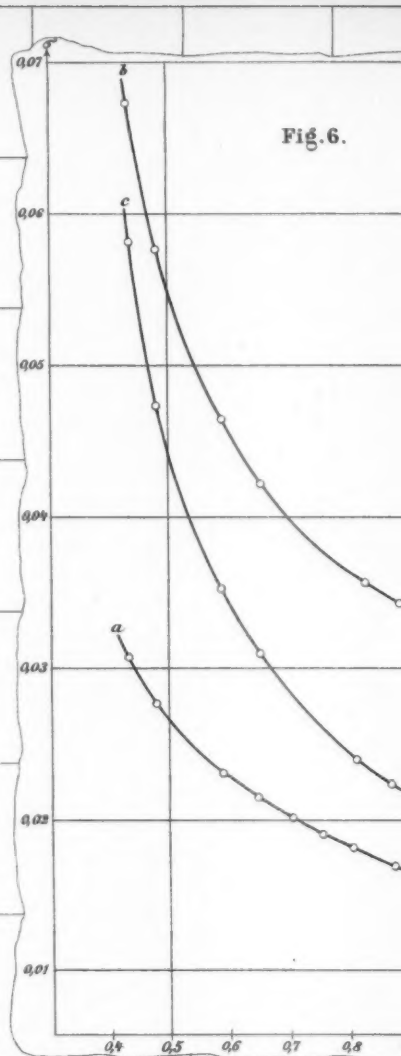
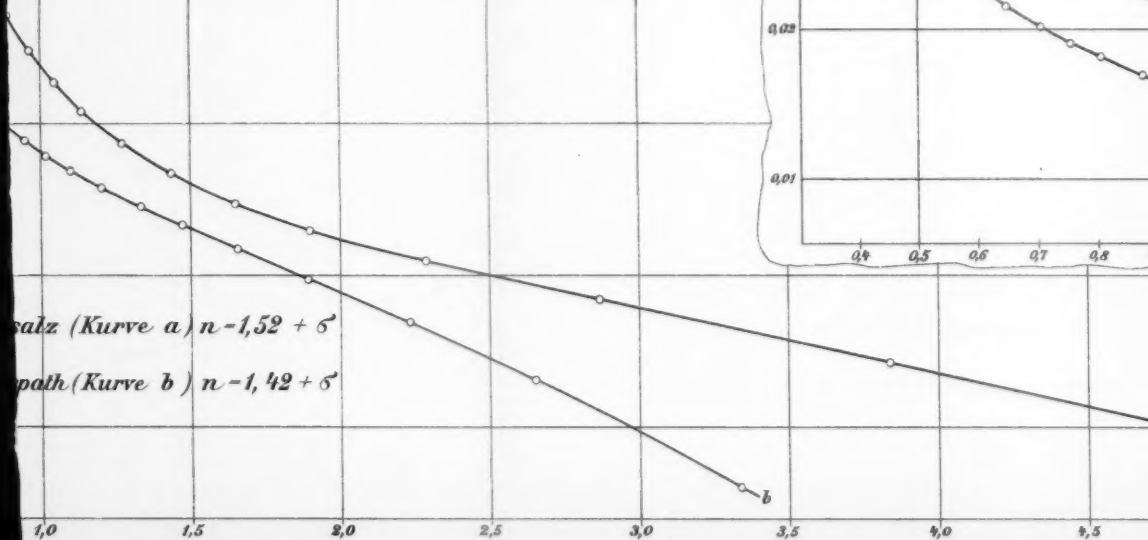
Fig. 7.

Für Steinsalz (Kurve a) $n-1,52 + \sigma$

Für Flußspath (Kurve b) $n-1,42 + \sigma$

Fig. 6.





Rubens.

Fig. 6.

Für Wasser (Kurve a) $n = 1,28 + \sigma$

„ Xylol (Kurve b) $n = 1,45 + \sigma$

„ Benzol (Kurve c) $n = 1,47 + \sigma$

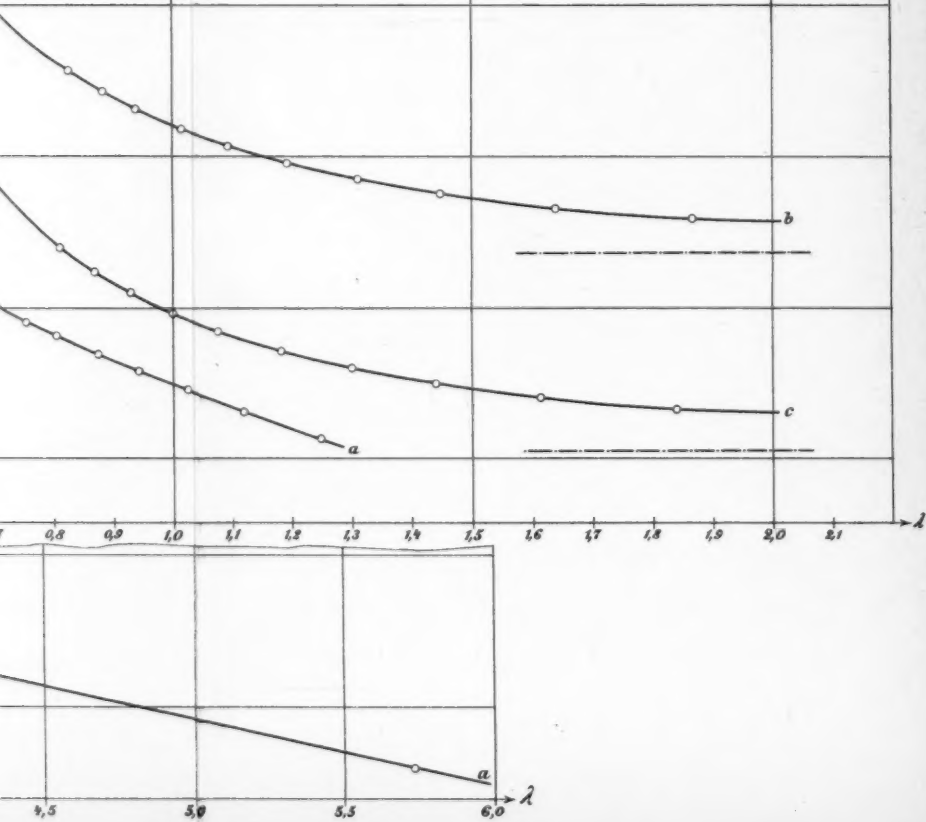


Fig. 1.

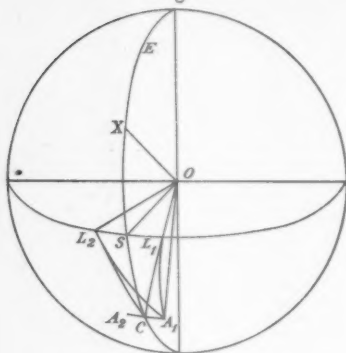


Fig. 2.

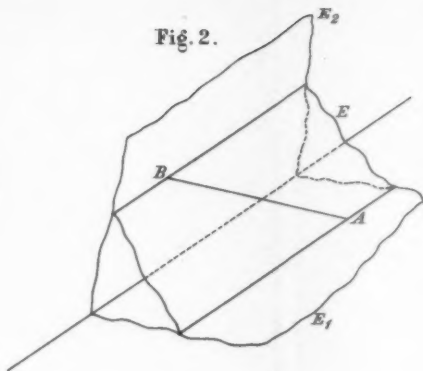


Fig. 3.

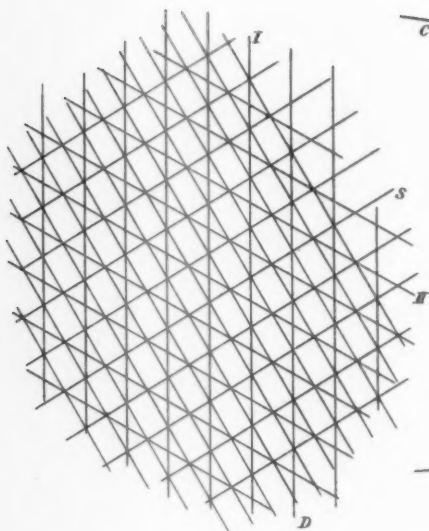


Fig. 6.

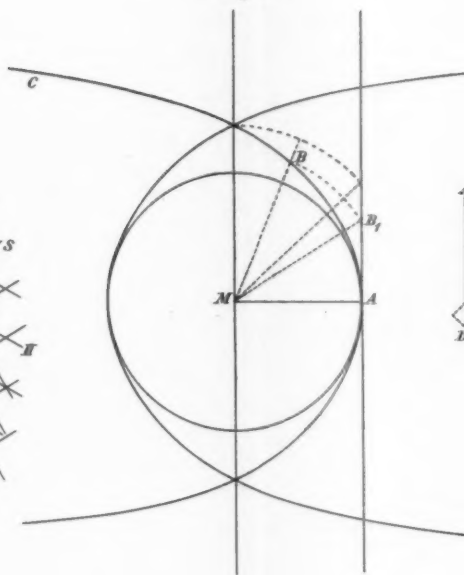


Fig. 7.

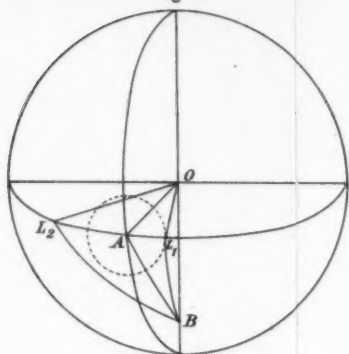


Fig. 9.

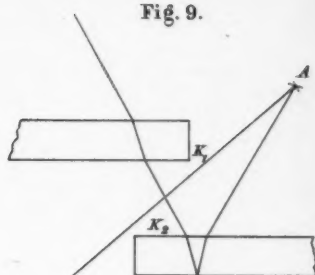


Fig. 8 a.

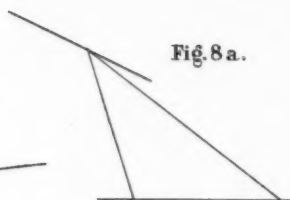


Fig. 10.

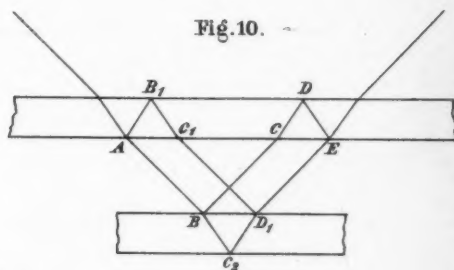


Fig. 8 b.

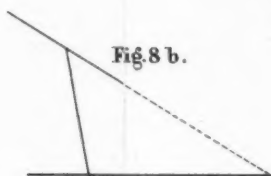


Fig. 8 e.



Fig. 5.

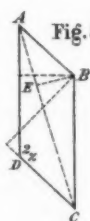


Fig. 8 c.

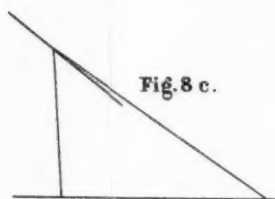


Fig. 8 d.



Fig. 4.

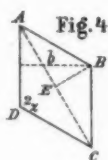




Fig. 3.

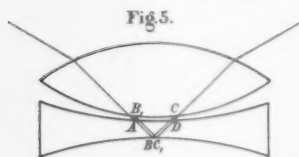


Fig. 5.

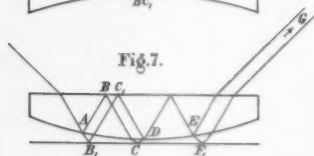


Fig. 7.

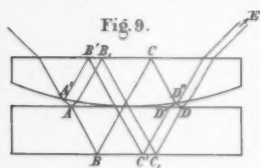


Fig. 9.



Fig. 4.

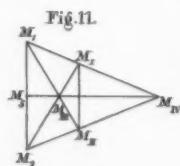


Fig. 11.

Fig. 1.

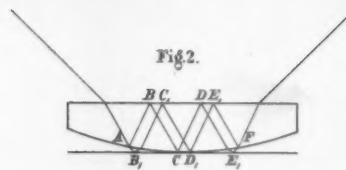
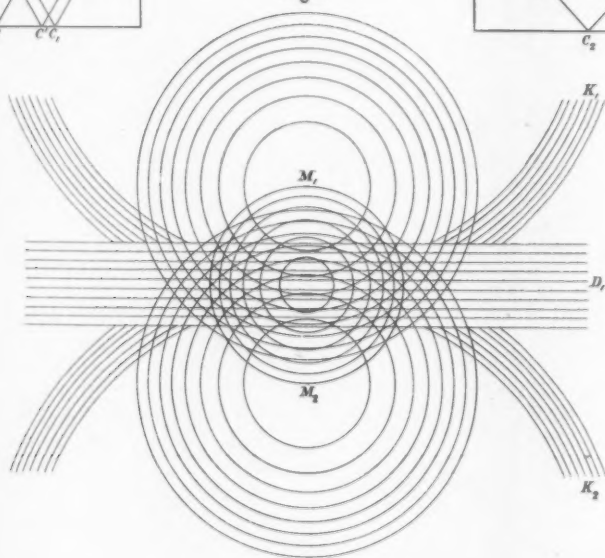


Fig. 2.

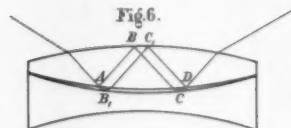


Fig. 6.

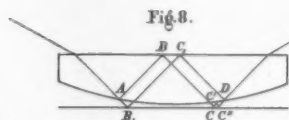


Fig. 8.

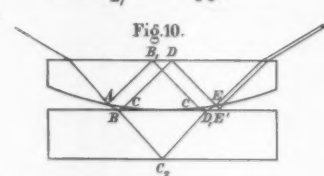


Fig. 10.

Fig. 12.

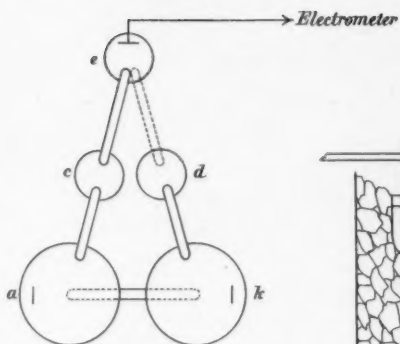


Fig. 13.

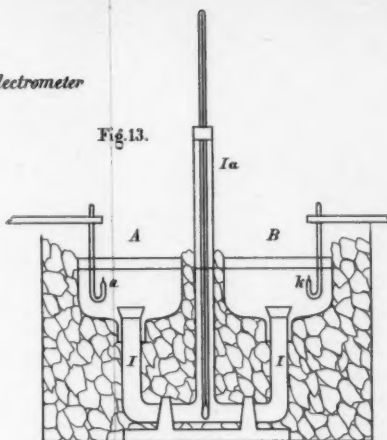


Fig. 15.



Fig. 17.



Fig. 13 a.

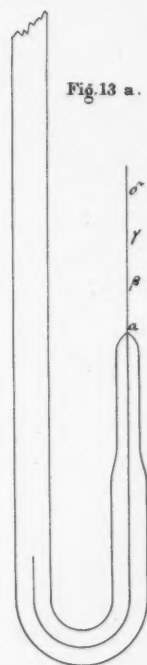
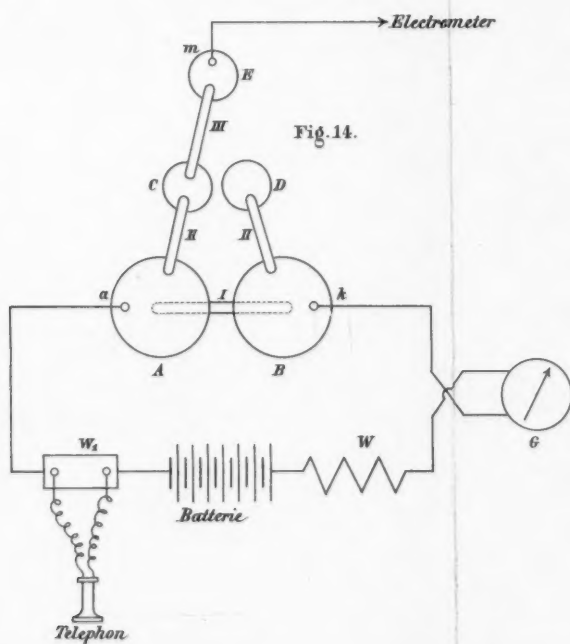


Fig. 19.



Fig. 14.



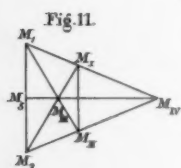
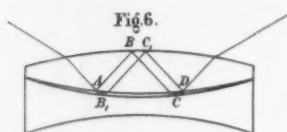
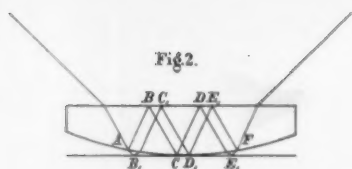
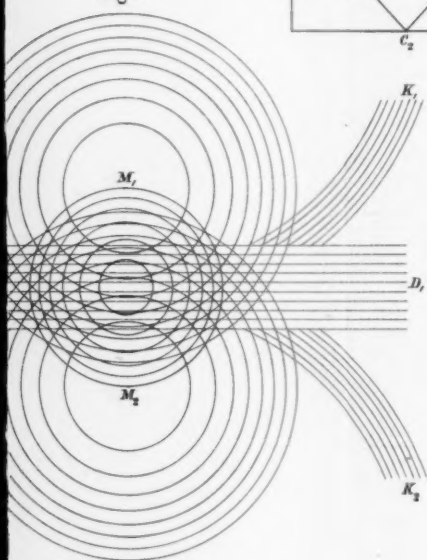


Fig. 1.



→ Electrometer

Fig. 13.

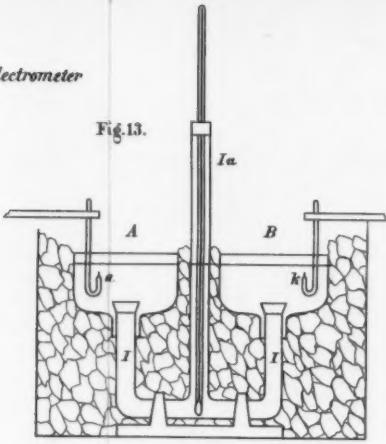


Fig. 15.



Fig. 16.



Fig. 17.



Fig. 18.



→ Electrometer

Fig. 14.

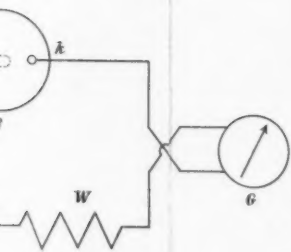


Fig. 13 a.

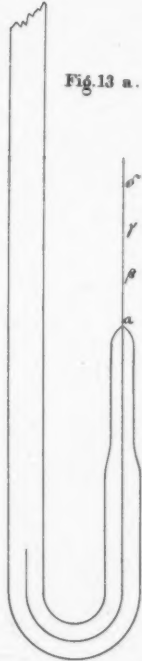


Fig. 19.



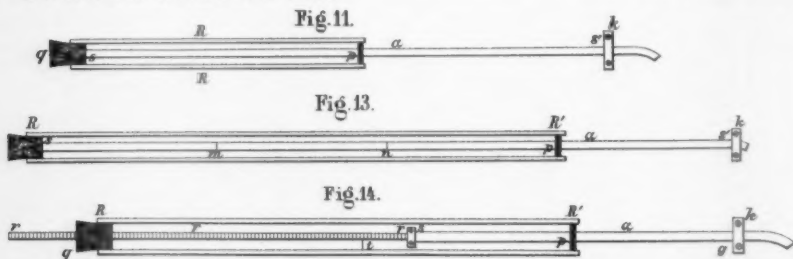
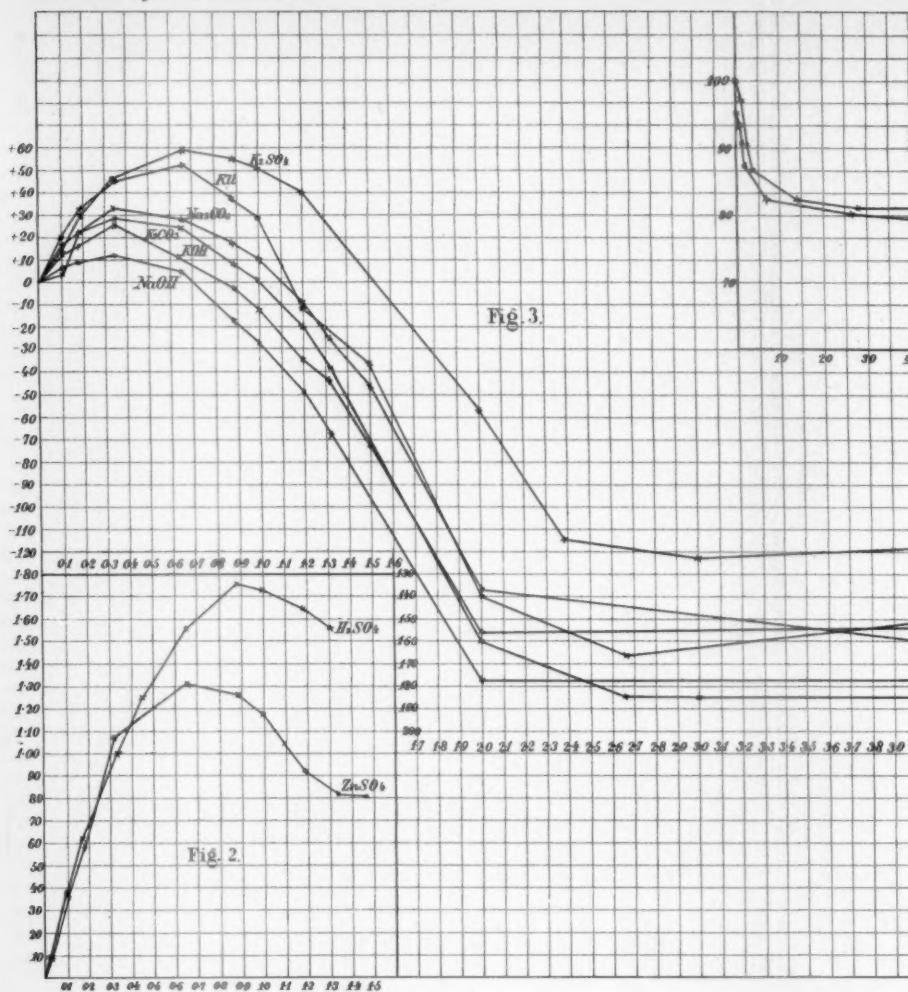
Fig. 20.



Fig. 21.



Fig. 12-21.



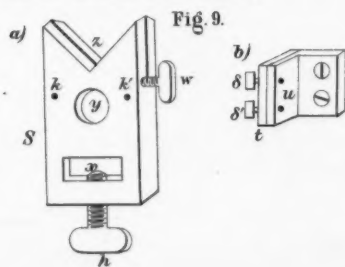
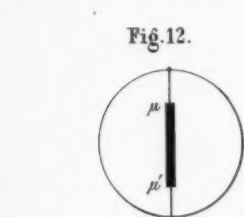
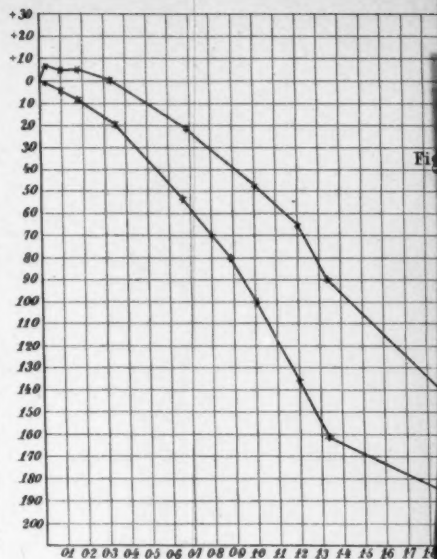
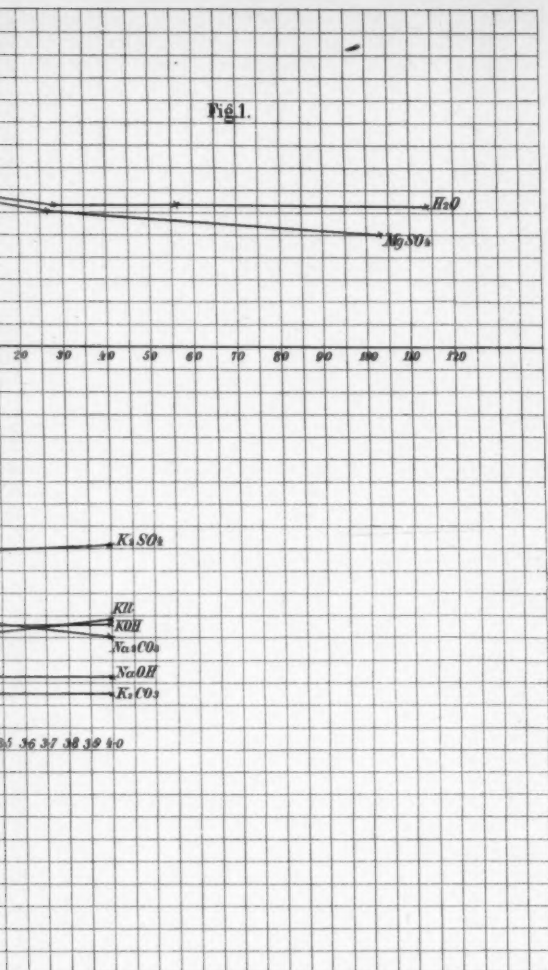
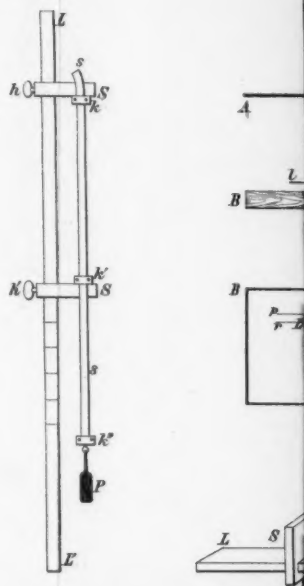
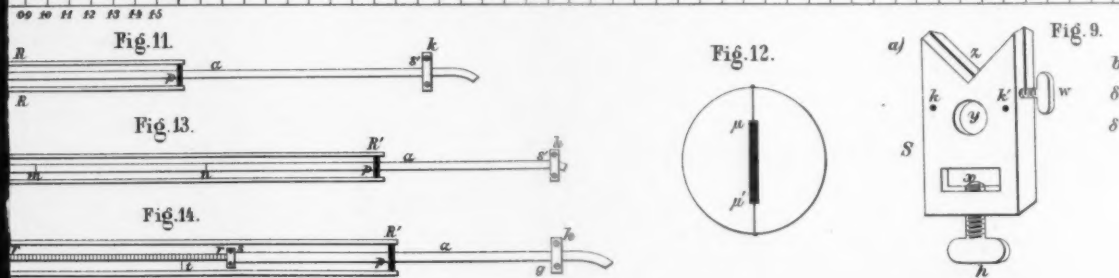
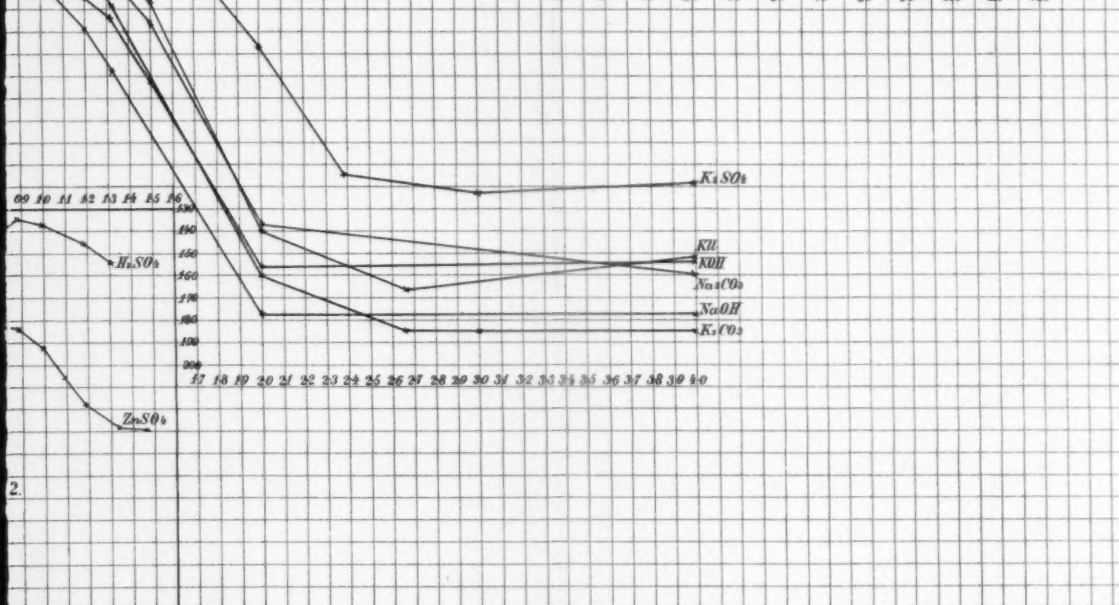
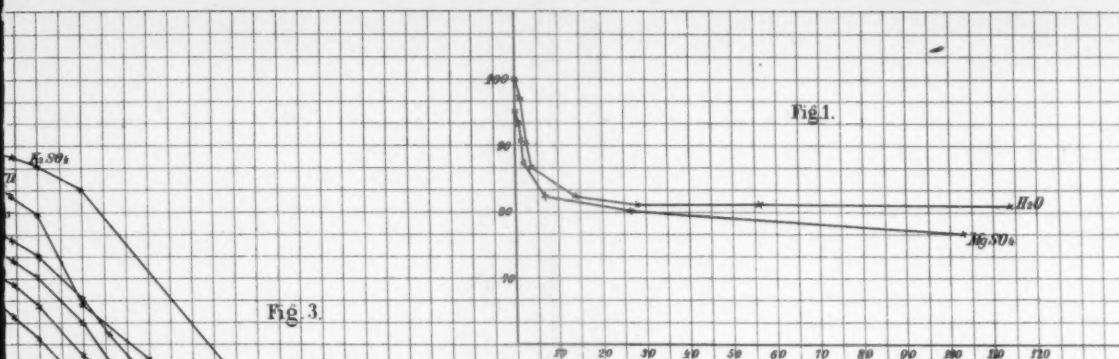


Fig. 10.



G. Meyer Fig. 1-4. Melde Fig. 5-14.



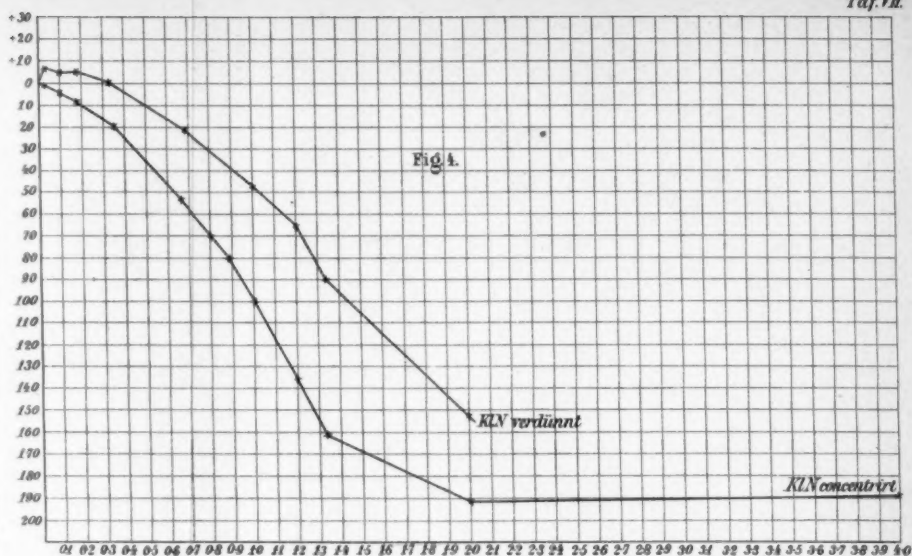


Fig. 10.

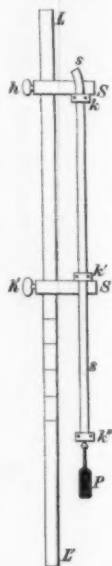


Fig. 5.

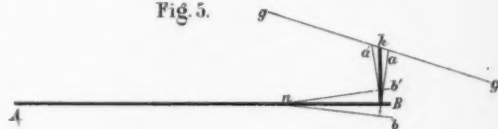


Fig. 6.

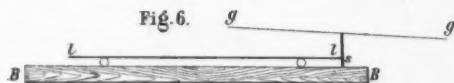


Fig. 7.

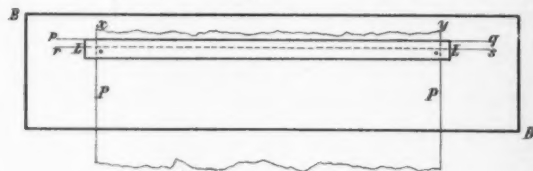


Fig. 8.

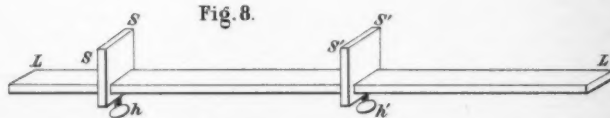


Fig. 2.

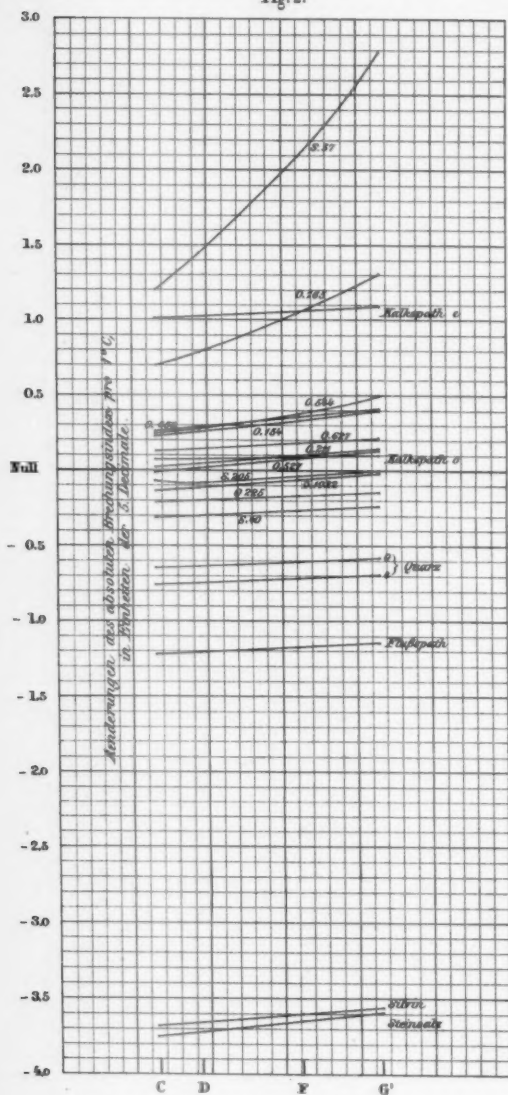


Fig. 3.

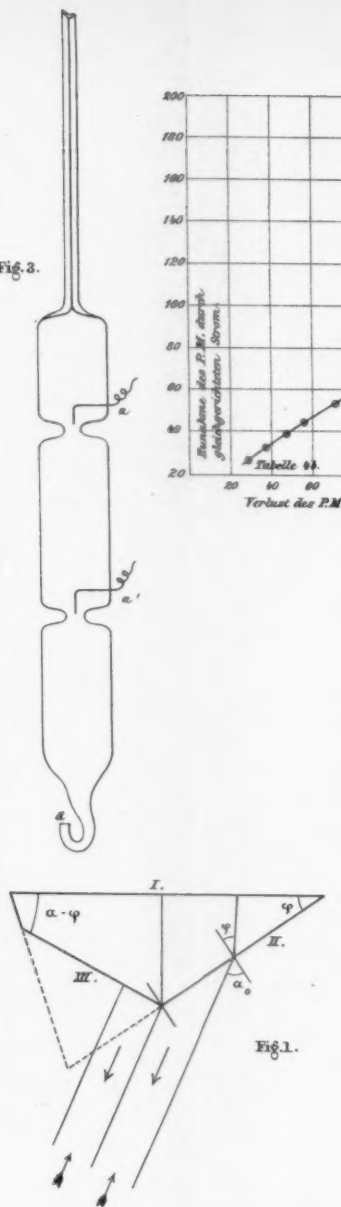


Fig. 9.

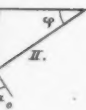
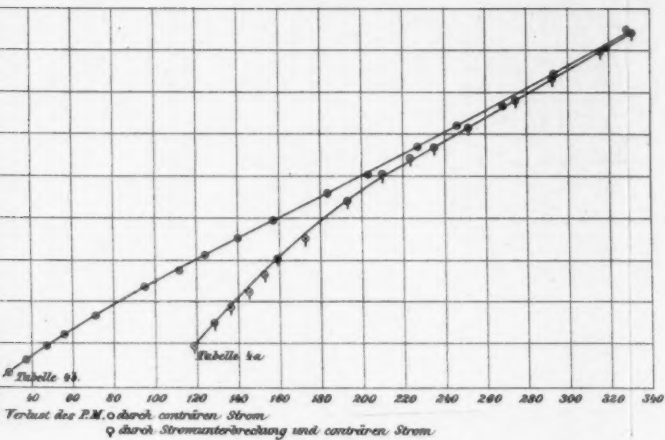


Fig. 1.

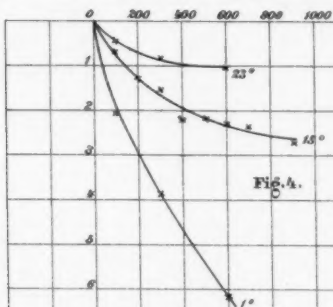


Fig. 4.

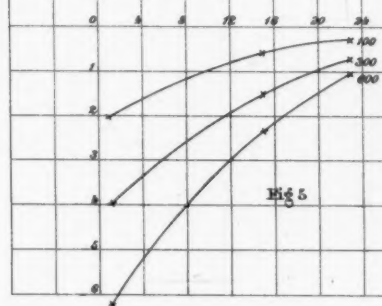


Fig. 5.



Fig. 6.

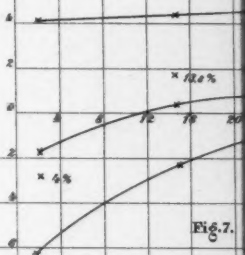


Fig. 7.

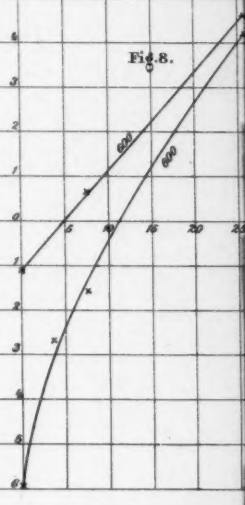


Fig. 8.

Pulfrich Fig. 1-2. Cohen Fig. 3-8. Fromme Fig. 9.

Elektr. Inst. v. L.

XU

Fig. 2.

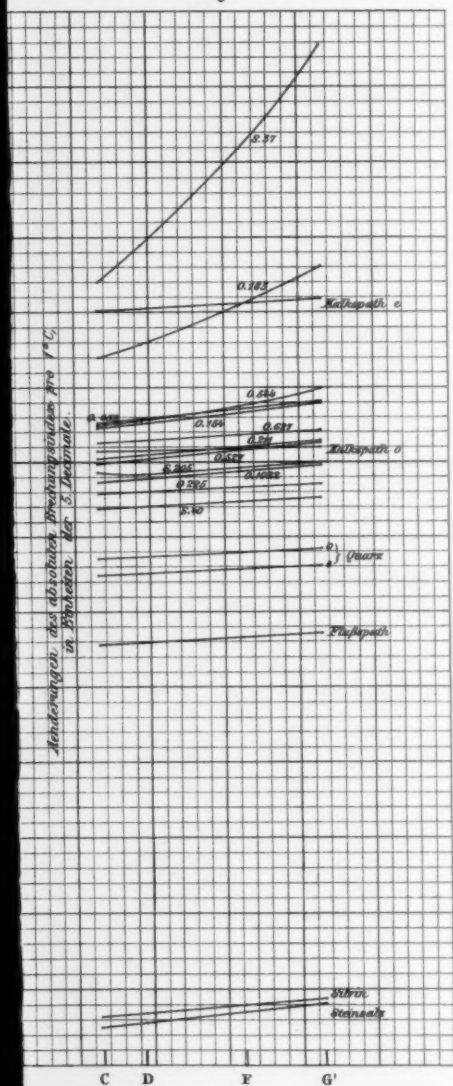


Fig. 3.

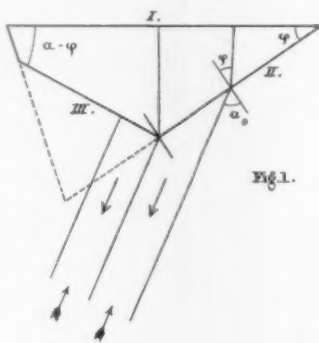
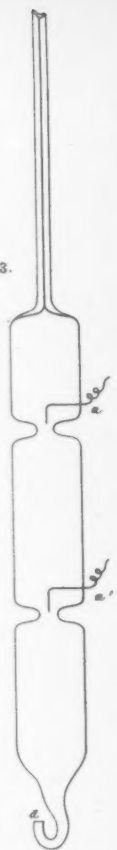


Fig. 1.

Fig. 6.

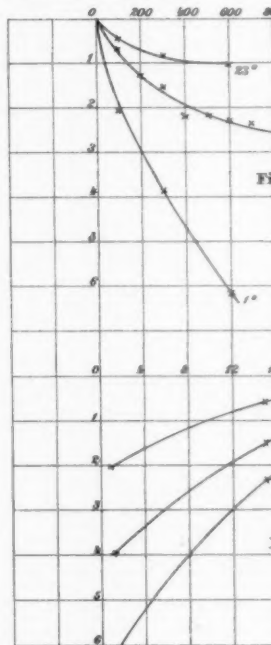
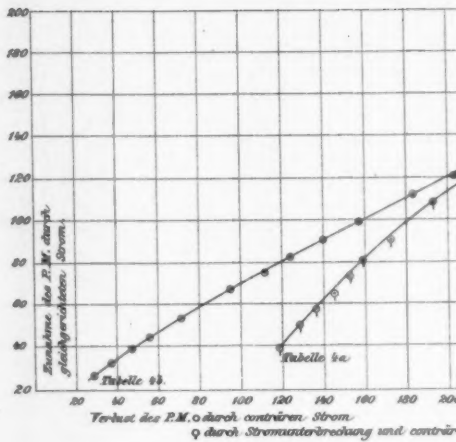


Fig. 9.

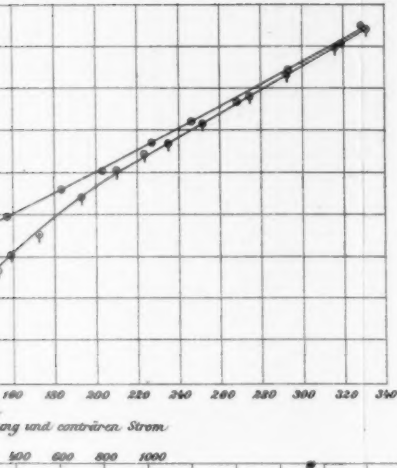


Fig. 9. 1000 und conträren Strom.

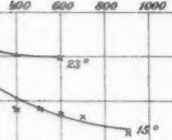


Fig. 4.

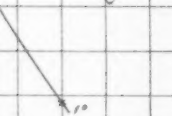


Fig. 5.

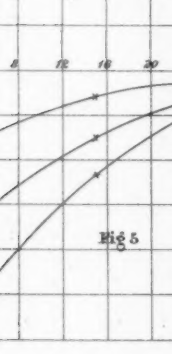


Fig. 6.

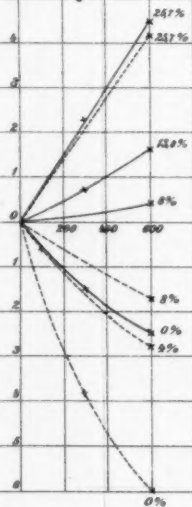


Fig. 7.

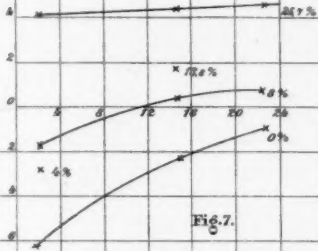
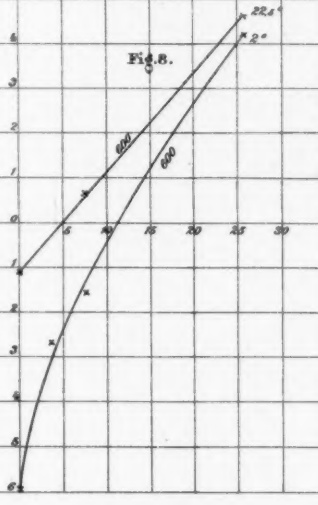


Fig. 8.





ers

d

zu

kr

de

lä

D

w

tr

sc

ha

w

än

Z

at

w



Im Verlage von **Johann Ambrosius Barth** in Leipzig ist erschienen:

Untersuchungen
über
die Ausbreitung der elektrischen Kraft

von
Dr. Heinrich Hertz,
Professor der Physik an der Universität zu Bonn.

17 Bogen mit 40 Figuren im Text.

Preis 6 Mark.

Die Arbeiten, durch welche Professor Hertz vor einigen Jahren zum erstenmale die zeitliche Ausbreitung einer vermeintlichen Fernkraft nachwies, und die Maxwellsche Theorie über den Zusammenhang der elektrischen Erscheinungen mit dem Lichte durch Versuche erläuterte, sind in den „Annalen der Physik und Chemie“ erschienen. Da einzelne Hefte dieser Annalen nicht abgegeben werden können, so war die Verlagsbuchhandlung nicht in der Lage, die häufig an sie herantretenden Wünsche nach jenen Arbeiten zu befriedigen. Deshalb erscheinen jene Arbeiten hier aufs neue in gesammelter Form. Der Verfasser hat den Abhandlungen eine einleitende Übersicht vorausgeschickt, durch welche er den inneren Zusammenhang der einzelnen Arbeiten auch äusserlich zum Ausdruck bringen und zugleich folgenden weiteren Zweck erreichen konnte.

Seit der ersten Veröffentlichung jener Arbeiten sind viele Physiker auf diesem Gebiete thätig gewesen. Die Versuche sind wiederholt, erweitert und vervollkommenet worden. Dabei haben sich die Haupt-

ergebnisse nur bestätigt gefunden; in einigen durchaus nicht unwesentlichen Fragen jedoch haben sich Irrtümer teils sicher herausgestellt, teils sind solche wahrscheinlich geworden. Der Verfasser ergreift also diese Gelegenheit, um die begangenen Fehler da anzuerkennen, wo er sicher ist, solche begangen zu haben und um die Wahrscheinlichkeit begangener Fehler da zu diskutieren, wo die sich zeigenden Schwierigkeiten auch jetzt nicht völlig gelöst sind. Zugleich ergreift er die Gelegenheit, um gewisse Fragen zu beantworten, welche immer und immer wieder persönlich an ihn gestellt wurden über den Zusammenhang der Versuche unter sich und mit der Maxwell'schen Theorie, sowie über das eigentliche Wesen der letzteren Theorie überhaupt. Hierdurch dürfte das Verständnis der Versuche, besonders aber der theoretischen Arbeiten, nicht unwesentlich erleichtert werden.

Durch jede Buchhandlung zu beziehen. Bei Einsendung des Betrages direkt von der

Verlagsbuchhandlung
Johann Ambrosius Barth
in Leipzig.

1892.

Nr. 4.

ANNALEN
DER
PHYSIK UND CHEMIE.

HERAUSGEGEBEN UND FORTGEFÜHRT VON

J. A. C. GREN, L. W. GILBERT, A. C. FÖRSTER.

NEUE FOLGE

BAND XLV. HEFT 4.

FÜR DIESHEFTE FOLGE ERZEUGT DIE VEREINIGTE PHYSIKALISCHES GEMEINSCHAFT
VIERTES HEFT.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GEMEINSCHAFT IN BERLIN

UND BESONDERER DER HERREN

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1892.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

Geschlossen am 1. April 1892.

Inhalt

	Seite
I. C. Pulfrich. Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Lichtbrechung des Glases	609
II. R. Cohen. Ueber den Einfluss des Druckes auf die Viscosität von Flüssigkeiten	666
III. Willy Wien. Ueber den Begriff der Localisirung der Energie	685
IV. F. Melde. Ueber die Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in membranösen Körpern. (Schluss)	729
V. E. Budde. Ueber integrierende Divisoren und Temperatur . . .	781
VI. K. R. Koch u. A. Wüllner. Ueber die galvanische Polarisation an kleinen Elektroden. (Schluss)	789
VII. Carl Fromme. Magnetische Experimentaluntersuchungen . . .	798
Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin.	
Sitzung vom 16. Februar 1892.	
F. Kessen. Ueber Messung von Verdampfungswärmen	821
M. Tblisse. 1. Ueber vollkommene Diopter	821
2. Ueber die Construction von Dioptern mit gegebenen Eigenschaften	823

Die geehrten Herren Mitarbeiter erlaubt sich die Redaction der Annalen zu empfehlen:

- 1) Die Manuscripte druckfertig einzuliefern und in den Correcturen doch beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten;
- 2) die Zeichnungen in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuscript selbst einzzeichnen), sowie, da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, recht genau die Stelle des Manuscriptes anzugeben, wo sie hingehören;
- 3) Citate am Rande oder unten auf den Seiten der Manuscripte (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen;
- 4) falls ausnahmsweise mehr als die 50 von der Verlagsbuchhandlung kostenfrei gelieferten Sonderabdrücke gewünscht werden, dies bei Rücksendung des ersten Correcturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite gefälligst bemerken, alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mittheilungen aber an die Verlagsbuchhandlung richten zu wollen.

Buchen erschienen und steht auf Verlangen beliebiges und postfrei
zu Diensten:

Katalog No. 120: Chemie. 271 Nrn.

Bibliothek des † Dr. G. Chancel, Professor an
der Akademie zu Montpellier.

Leipzig. **F. A. Brockhaus' Antiquarium.**

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Vorlesungen über die Maxwell'sche Theorie der Electricität und des Lichtes

von

Dr. Ludwig Boltzmann,

Professor der Mathematischen Physik an der Universität München.

I. Theil:

Ableitung der allgemeinen Gleichungen für ruhende Körper.

185 S. 8° mit vielen Textfiguren und 3 Lithograph. Tafeln.

Preis 5 Mark.

„Sehon vor Jahren erzählte Boltzmann dem Besonderen, dass er da-
mit beschäftigt sei, die genialen Theorien Maxwells von allen Schlächen
und Seiten zu stehen und den Kern herauszuschälen. Inzwischen
kam die Nachricht, dass der grosse Analytiker seine Lehrthätigkeit an
der Münchener Universität mit Vorlesungen über Maxwell's Theorie be-
gonnen habe. Nun hat der Meister die Mühe einer sorgfältigen Redaktion
seiner Vorlesungen nicht gescheut und er bietet der wissenschaftlichen
Welt damit ein Geschenk, das zu den wertvollsten unserer Litteratur
gehört. Denn nur ein König, nicht ein Kaiser, wie sich Boltzmann in
übergrosser Bescheidenheit nennt, konnte den oft unentwirrbar compli-
cirtsten Plan des Maxwell'schen Lehrgebäudes bis in alle Details so ver-
stehen, um ihn mit dieser Klarheit blosszulegen. Aus den einfachsten
Annahmen — den Gesetzen der cyclichen Permittivität und der Le-
grangeschen Gleichung — entwickeln sich die vollständigsten Schlüsse mit
einer Klarheit und Eleganz, die neben der vollkommensten wissenschaftlichen
Befriedigung auch einen hervorragenden ästhetischen Genuss bietet.
(Folgt ein Beispiel.) . . . Boltzmann entlässt uns — um sein Schluss-
bild zu gebrauchen — mit dem Blicke auf die reich besetzte Tafel, an
die uns zu setzen wir noch nicht eingeladen wurden. Hoffen wir, dass
der Meister mit dieser Einladung nicht so lange zögern und uns bald
mit der Fortsetzung seines herrlichen Werkes erfreuen wird.“

(Zeitschrift f. phys. u. chem. Unterw. 1891/92, Heft 2.)

Lichtelektrische Apparate

nach Elster u. Geitel. *Amalgam-Apparate* (Wied. Ann. 42, p. 564, Fig. 1) und *Kaltumzellen* (Wied. Ann. 43, p. 225) sowie dazu passende Säulen und Elektroskope liefert

Louis Müller-Unkel,

Braunschweig, Rebenstr. 13.

Dr. Stöhrer & Sohn in Leipzig

[fertigen und empfehlen

physikalische Apparate und Instrumente

in bester Ausführung.

Zusendung neuer Preisliste (1892) auf Verlangen kostenlos.

A. Treffurth, Ilmenau i. Thüringen

Chem. u. physik. Glasapparate
und -Instrumente

sowie

allgemeine Gebrauchs-Artikel von Glas und Porzellan etc.

Bestens widerstandsfähigstes Glas — feuerbeständiges Porzellan.

Durchaus sach- und zweckgemäße Ausführung. Liste kostenlos.

Electrochemisches Laboratorium,

complet eingerichtet, wegen zeitweiliger anderer Unternehmung
sofort zu vermieten. Offerten m. Refer. erb. u. J. B. 8212
an Rudolf Masse, Berlin S. W.

Verlag von FERDINAND ENKE in Stuttgart.

Seeben erschien:

GRUNDRISS DER PHYSIK

zum Gebrauche für Mediciner

von Dr. Bruno Borchardt

in Berlin.

Mit 82 Abbildungen. 8. geh. M. 3.—

Mit drei Beilagen von Johann Ambrosius Barth in Leipzig,
O. Schack in Leipzig und Julius Springer in Berlin.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

